Comment comparer des volumes ? (sujet)

Cette activité d'étude et de recherche permet d'introduire ou bien de réinvestir des notions nouvelles ou des méthodes spécifiques du **programme de seconde** à travers une problématique donnée : comparer des volumes. Elle est divisée en paragraphes qui peuvent être traités à des moments différents durant l'année. Elle permet notamment de donner un sens au calcul algébrique qui valide ici les solutions d'une équation trouvées graphiquement ou par une méthode algorithmique. Par ailleurs, la résolution des différentes questions donne l'occasion de travailler de façon pratiquement exhaustive les **compétences mathématiques**.

Plusieurs questions de cette activité peuvent être déjà abordées en classe de **troisième**.

Mots-clefs. fonction, théorème de Thalès, équation, inéquation, résolution approchée d'équations, patron, géométrie dans l'espace, algorithme de dichotomie, condition nécessaire et suffisante

Niveau. Troisième, Seconde

I. Présentation du problème

On considère deux verres, l'un de forme cylindrique (par exemple un verre à liqueur) et l'autre de forme conique (par exemple un verre à champagne). On verse un liquide dans chaque verre jusqu'à une certaine hauteur x (x est exprimée en cm). Le but de cette activité est de déterminer par différentes méthodes la hauteur x du liquide qu'il faut verser pour que le volume dans le verre de forme cylindrique soit égal à celui du verre de forme conique. Dans un deuxième temps, on comparera ces deux volumes en fonction de la hauteur x puis on élargira le problème.

II. Modélisation

On modélise le verre à champagne par un cône de révolution C de sommet A, de rayon de base OB égal à 5 cm et de hauteur totale OA égale 6 cm et le verre à liqueur par un cylindre de révolution de rayon 2 cm et de hauteur totale 8 cm (voir la figure 1).

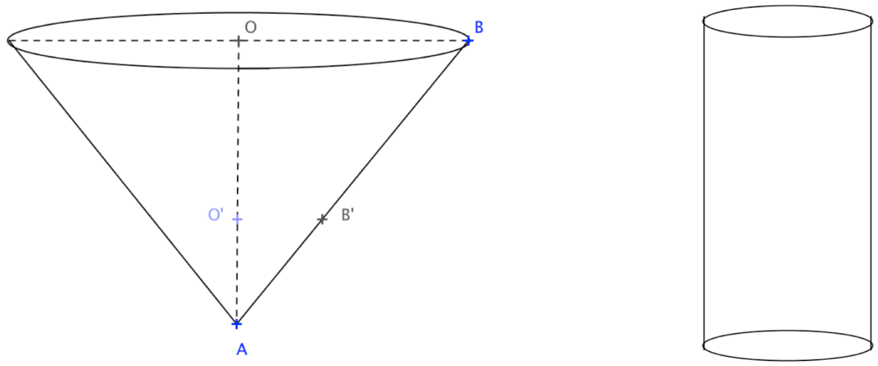

Figure 1.

1. Justifier le fait que $x \in]0;6[$. On supposera dans le reste du problème que $0 < x < 6\,\text{cm}$.
2. On modélise le liquide versé dans le verre conique jusqu'à une hauteur x par un cône de révolution C' de centre O′ (O′ appartient au segment [AO]), de sommet A et de rayon O′B′ tel que B, B′ et A soient alignés. Justifier que les droites (OB) et (O′B′) sont parallèles.
3. Représenter en perspective sur la figure 1 le liquide versé dans chaque verre jusqu'à une hauteur x.

III. Expérimentation

1. On se propose de réaliser les patrons des deux solides.
   a. Calculer la longueur de la génératrice [AB] du cône C.
   b. Calculer le périmètre du cercle de base du cône C.
   c. On rappelle que dans un cercle il y a proportionnalité entre la mesure d'un arc et l'angle qui l'intercepte. Montrer que la valeur exacte de l'angle α est $\dfrac{1800\sqrt{61}}{61}$ degrés (voir la figure 2).
   d. Réaliser le patron du cône C puis celui du cylindre.

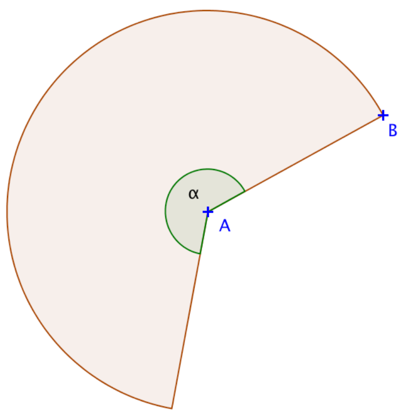

Figure 2.

2. Pour réaliser une graduation sur le cylindre, tracer des segments parallèles espacés de 1 cm comme l'indique la figure 3 sur la face latérale (extérieure) de ce cylindre.

Figure 3.

3. On se propose de graduer la face latérale du cône

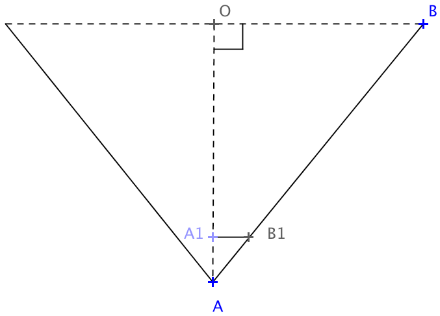

Figure 4.

   a. On considère le point A_1 du segment $[OA_1]$ tel que $(A_1B_1) \parallel (OB)$ et $AA_1 = 1\,\text{cm}$ (voir la figure 4).
   Calculer la longueur AB_1.

   b. Tracer sur la face latérale (intérieure et extérieure) du patron du cône C les cercles de centre A et de rayon AB_1, $2\,AB_1$, $3\,AB_1$, $4\,AB_1$, $5\,AB_1$.

4. Verser une hauteur de 1 cm de sucre (ou de semoule) dans le cône réalisé puis verser cette quantité dans le cylindre. Comparer.
   Recommencer avec une hauteur de 2 cm, 3 cm etc. Le problème posé semble-t-il avoir une solution ? Justifier.

IV. Résolution du problème par différentes méthodes

1. **Recherche de l'expression du volume des deux verres en fonction de la hauteur x.**
   Partie A. Étude d'un cas particulier.

   a. On verse une hauteur de 3 cm de liquide dans les deux verres. Calculer le volume exact V (en cm^3) de liquide dans le verre cylindrique.
   Donner la valeur arrondie au mm^3.

   b. En vous aidant de la figure 5, calculer le volume exact W (en cm^3) de liquide dans le verre conique.
   Donner la valeur arrondie au mm^3.

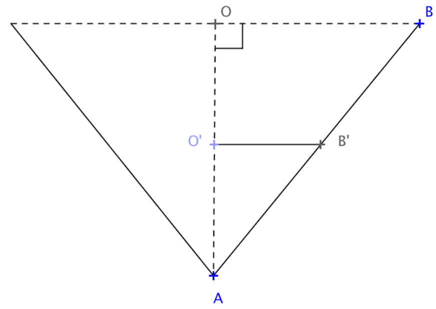

Figure 5.

Partie B. Cas général

Soit x la hauteur de liquide versé dans chaque récipient (en cm^3).
On note $V(x)$ le volume du liquide en cm^3 dans le verre cylindrique.
On note $W(x)$ le volume du liquide en cm^3 dans le verre conique.
Exprimer $V(x)$ et $W(x)$ en fonction de x.

2. **Résolution graphique du problème.**

   a. On cherche à déterminer la hauteur x du liquide qu'il faut verser pour que le volume soit égal dans le verre de forme cylindrique et dans celui de forme conique.
   Traduire ce problème par une équation (E).

   b. On considère le fonction V définie par $V(x) = 4\pi x$ et sa courbe représentative C_V dans le plan muni d'un repère. On considère la fonction W définie par $W(x) = \dfrac{25\pi}{108}x^3$ et sa courbe représentative C_W dans le plan muni d'un repère.

      i. Sur votre calculatrice, tracer les courbes C_V et C_W.

      ii. Pourquoi peut-on conjecturer que la solution au problème est unique ?

      iii. Encadrer la solution par deux entiers consécutifs.

3. **Résolution du problème par balayage.**
   On se propose maintenant de trouver la solution du problème en utilisant un tableur.

   a. Préliminaire : montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{25\pi}{108}x^3 - 4\pi x = 0$.
   On note f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{25\pi}{108}x^3 - 4\pi x$.

   b. Réaliser cette feuille de calcul en prolongeant jusqu'à $x = 5$ et donner un encadrement de la solution de (E).

1	x	$f(x)$
2	4	
3	4,1	
4	4,2	
5	4,3	

   c. Modifier le pas de la feuille de calcul de façon à donner un encadrement d'amplitude $0,01\,\text{cm}$ de la solution.

   d. Est-il possible par cette méthode de trouver une valeur approchée de la solution à $0,001\,\text{cm}$ près ?

4. **Résolution du problème par un algorithme de dichotomie**
   On considère l'algorithme suivant :

Variables	a, b, p, m
Entrées	*Saisir* a, b, p
Traitement	*Tant que* $b - a > p$ *faire* m *prend la valeur* $(a+b)/2$ *Si* $f(a) \times f(m) < 0$ *Alors* b *prend la valeur* m *Sinon* a *prend la valeur* m *Fin si* *Fin tant que*
Sortie	*Afficher* a, b

Comment choisir les valeurs de a, b et p pour que cet algorithme affiche un encadrement d'amplitude 10^{-5} cm de la solution au problème donné ? Justifier votre réponse.

Programmer cet algorithme pour donner un encadrement d'amplitude 10^{-5} cm de la solution.

5. **Résolution du problème : utilisation du calcul algébrique**

   a. Montrer que l'équation (E) peut s'écrire $\dfrac{25\pi x^3}{108} - 4\pi x = 0$.

   b. En factorisant le premier membre par πx, résoudre (E). On donnera la valeur exacte de la solution non nulle sous la forme $x_0 = a\sqrt{b}$ avec a rationnel et b entier le plus petit possible.

   Donner une valeur approchée de la solution x_0 à 0,001 près.

   c. Calculer la valeur exacte du volume obtenu pour $x = x_0$. On notera V_0 ce volume.

V. Comparaison des deux volumes en fonction de la hauteur de liquide versé

1. Montrer que comparer les deux volumes $V(x)$ et $W(x)$ en fonction de x revient à étudier le signe d'une expression.
2. Étudier le signe de cette expression dans l'ensemble des réels.
3. En déduire la comparaison des deux volumes en fonction de la hauteur x du liquide versé.

VI. Comparaison avec un verre de forme sphérique

On considère maintenant un verre « ballon ». Il peut être modélisé par une calotte sphérique illustrée par la figure 6.

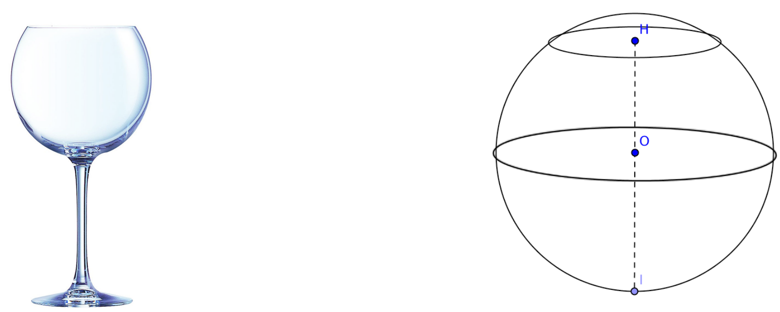

Figure 6.

1. La contenance de ce verre ballon est égale à V_0. On suppose de plus que $h = \dfrac{9}{5}R$. Montrer que la valeur arrondie de R au dixième près est $2,3\,\text{cm}$.
2. On a représenté sur la figure 7 les courbes C_V, C_W et C_S où S est la fonction donnant le volume de liquide versé dans le verre ballon en fonction de la hauteur de liquide versé.
   a. Donner la valeur exacte des coordonnées du point A.
   b. Avec la précision permise par le graphique, comparer le volume du verre ballon et du verre cylindrique puis celui du verre ballon avec le verre conique en fonction de la hauteur x de liquide versé pour x compris entre 0 et l'abscisse de A.
   c. Valider votre observation en tenant compte de la forme des verres.

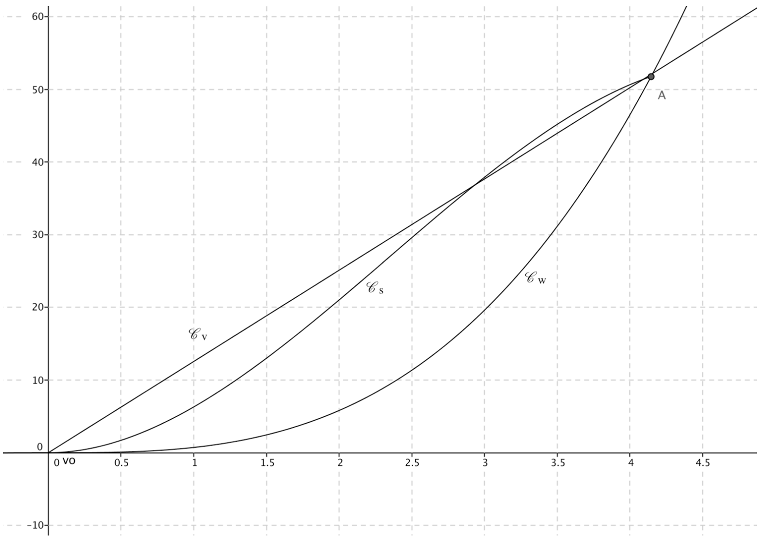

Figure 7.

VII. Condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution

On considère un verre conique de rayon $5\,\text{cm}$ et de hauteur $6\,\text{cm}$ et un verre de forme cylindrique de rayon $r\,\text{cm}$ et de hauteur $M\,\text{cm}$. On verse un liquide dans chaque verre jusqu'à une hauteur x exprimée en cm (où $x > 0$). On se pose la question suivante « Existe-t-il une hauteur x pour laquelle le volume de ces deux verres soit identique ? »

1. En vous servant de l'étude précédente, rappeler une condition suffisante sur la hauteur M et le rayon r du verre cylindrique pour que le problème ait une solution unique.
2. Cette condition est- elle nécessaire ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la hauteur M et sur le rayon r du verre cylindrique pour que le problème ait une solution unique.

Anne Chomel
anne.chomel@hotmail.fr
Lycée Jean-Baptiste Say
11 bis, rue d'Auteuil
75 016 Paris