Qui a gagné le Tour de France 1989 ?

Remarque. Ceci est une version remaniée d'un article paru au *Girls' Angle Bulletin*. Voici la référence exacte :
Denis Serre, *Who won the 1989 Tour de France ?*, *Girls Angle Bulletin* **4 (5)**, juin 2011, p. 5-7.

Introduction

Greg LeMond est le premier Américain a avoir gagné le Tour de France. Il le remporta trois fois (1986, 1989 et 1990) et conquit le public français. Sa victoire en 1989 est restée dans les mémoires. Après plus de 3 200 kilomètres de course, LeMond s'adjugea la victoire avec 8 secondes d'avance sur Laurent Fignon (qui avait gagné le Tour en 1983 et 1984), ce qui reste aujourd'hui la plus courte victoire de l'histoire de cette course.

À quoi bon poser la question contenue dans le titre, puisque je viens d'en donner la réponse ? Commençons par expliquer la différence entre les temps de course réel et officiel. Pour classer les coureurs, on chronomètre le temps qu'ils mettent à parcourir l'étape. Les temps officiels sont enregistrés à la seconde près. Comparé à une épreuve de 100 m (où les temps sont mesurés au centième de seconde près), cela peut paraître très grossier mais est en fait adapté à une épreuve dont chaque étape dure plusieurs heures et où des écarts de quelques dixièmes (voires quelques centièmes) de seconde entre coureurs sont peu probables. Bien sûr, cela signifie que le temps véritable du coureur est différent de son temps officiel. Selon le règlement du Tour de France, le temps est en fait arrondi à la seconde inférieure. Dire qu'un cycliste a couru telle étape en 1 h 23 min 45 s signifie donc qu'il l'a courue en un temps compris entre 1 h 23 min 45 s (inclus) et 1 h 23 min 46 s (exclu). Après les 21 étapes du Tour, cela veut dire qu'un coureur a pu obtenir un avantage très proche de 21 secondes, alors qu'un de ses adversaires a pu ne rien obtenir du tout. En réalité, une telle situation est très improbable, puisqu'il est raisonnable d'imaginer que les arrondis se répartissent uniformément entre 0 et 1 seconde, indépendamment les uns des autres, si bien que leur effet total sera très probablement proche de 10,5 secondes, en vertu de la **loi des grands nombres**.

Cependant, dans le cas où l'un des coureurs (appelons-le G) a *officiellement* moins de 21 secondes d'avance sur un adversaire L, on ne peut pas exclure que L ait en fait parcouru toutes les étapes en un temps total inférieur à celui de G !

Revenons donc à la question du titre : LeMond est allé *officiellement* plus vite que Fignon, mais comme son avance n'est que de 8 secondes, il est possible que Fignon ait été *en réalité* plus rapide. Intéressons-nous donc à la question suivante : **quelle est la probabilité que le résultat officiel ait été faux ?**

Avant de répondre, il faut apporter une modification aux rappels du réglement donnés plus haut : quand deux coureurs arrivent dans le même peloton, leurs temps de course sont égaux. Cela peut sembler arbitraire, mais est en fait très sage : dans le cas d'une arrivée groupée à près de 150 coureurs, le peloton peut faire plus de 30 mètres de long et les derniers coureurs arrivent donc quelques secondes après les premiers. Il serait alors dangereux que tous les coureurs du peloton sprintent pour gagner quelques secondes, ce qui justifie cette règle.

Lors du Tour 1989, LeMond et Fignon sont arrivés onze fois dans le même peloton. Pour ces épreuves, nous ne devons donc pas nous préoccuper de l'arrondi, puisqu'il est entendu qu'ils sont arrivés « ensemble ». Il reste donc dix épreuves au cours desquelles LeMond et Fignon sont arrivés dans des pelotons différents. Chacun a donc été avantagé par les arrondis d'au plus 10 secondes. Notons ℓ l'avantage (en secondes) reçu par LeMond et f celui reçu par Fignon. Si $\ell - f > 8$, la victoire de LeMond est donc un artefact de la procédure d'arrondi. Comme on l'a dit, c'est possible, mais peu probable. Peut-on quantifier cette probabilité ?

Transformation du problème. Si vous voyez déjà comment ce problème se ramène au calcul du volume d'un polyèdre de dimension 20, vous apprécierez sans doute de trouver la solution par vous-même et de la comparer au résultat donné à la fin de l'article. Si ce n'est pas le cas, je vais vous expliquer comment ce problème se ramène à un problème de géométrie en le transformant en un problème plus symétrique.

Le problème initial implique vingt erreurs d'arrondi (dix pour chaque coureur) $\ell_1,\dots,\ell_{10}$, $f_1,\dots,f_{10}$ entre 0 et 1 et pose la question de savoir si $\ell_1+\cdots+\ell_{10}-\left(f_1+\cdots+f_{10}\right) > 8$. En posant $\ell_i' = \ell_i - 1/2$, $f_i' = 1/2 - f_i$, on considère maintenant[1] vingt nombres aléatoires $\ell_1',\dots,\ell_{10}',f_1',\dots,f_{10}'$ compris entre $-1/2$ et $1/2$ et la question

$$\ell_1+\cdots+\ell_{10}-\left(f_1+\cdots+f_{10}\right) \overset{?}{>} 8$$

se traduit[2] en

$$\begin{aligned} & \left(\ell_1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\ell_{10}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-f_1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-f_{10}\right) \overset{?}{>} 8 \\ \Longleftrightarrow \quad & \ell_1'+\cdots+\ell_{10}'+f_1'+\cdots+f_{10}' \overset{?}{>} 8. \end{aligned}$$

En d'autres termes, on s'est ramené à un cas particulier ($\mathrm{N}=20$ et $\mathrm{T}=8$) de la question suivante :

> **Étant donné** N **nombres choisis aléatoirement**[3] **entre** $-\dfrac{1}{2}$ **et** $\dfrac{1}{2}$**, quelle est la probabilité que leur somme dépasse** T **?**

Exemples simplifiés : le cas $\mathrm{N}=3$

Avant de comprendre la situation générale, ou même le cas qui nous intéresse, considérons le cas plus simple $\mathrm{N}=3$. Notons x, y et z nos trois nombres aléatoires. Le triplet (x,y,z) décrit alors un point aléatoire dans le cube dont les sommets sont $(\pm1/2,\pm1/2,\pm1/2)$. Ce point (x,y,z) est alors tiré avec une probabilité uniforme : la probabilité de tomber dans une partie donnée du cube est donc égale au volume de cette partie divisé par le volume du cube (ici, 1).

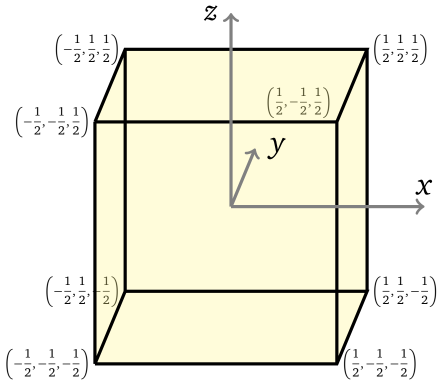
Cherchons à résoudre le problème dans le cas $\mathrm{T}=1$, c'est-à-dire à déterminer la probabilité que $x+y+z \geqslant 1$. Pour cet exemple, l'événement $[x+y+z \geqslant 1]$ correspond au tétraèdre dont les sommets sont $(1/2,1/2,1/2)$, $(-1/2,1/2,1/2)$, $(1/2,-1/2,1/2)$ et $(1/2,1/2,-1/2)$. Ce tétraèdre est une pyramide à base triangulaire, de volume $1/6$.

---

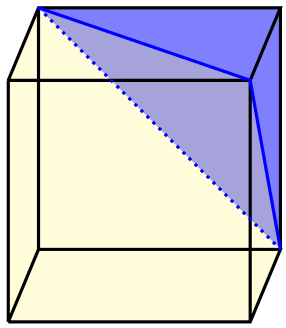
1. Techniquement, comme $0 \leqslant \ell_i, f_i < 1$, on a $-\frac{1}{2} \leqslant \ell_i' < \frac{1}{2}$ mais $-\frac{1}{2} < f_i' \leqslant \frac{1}{2}$. Cependant, la probabilité que ℓ_i, par exemple, prenne exactement la valeur 0 est nulle. Ainsi, du point de vue de calcul des probabilités, on peut supposer que nos nombres aléatoires ℓ_i et f_i décrivent uniformément l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Ainsi, ℓ_i' et f_i' décrivent uniformément l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

2. Comme dans la note précédente, on peut remplacer l'inégalité stricte $>$ par une inégalité $\geqslant$ sans changer la probabilité.

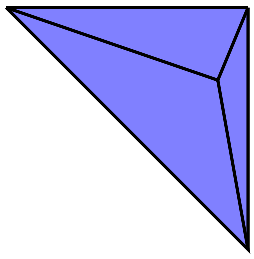
3. Uniformément, et indépendamment les uns des autres.



(x, y, z) est un point aléatoire uniforme du cube.

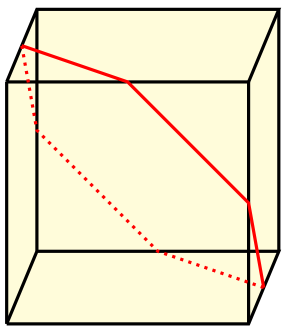


L'événement considéré correspond au tétraèdre bleu.



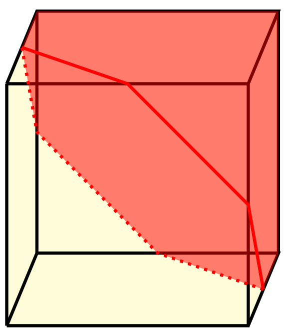
Volume $= 1/6$.

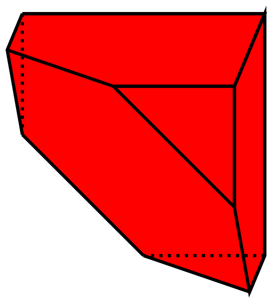
Considérons maintenant le cas un peu plus compliqué $T = 0$. Il s'agit donc de déterminer la probabilité $P(x + y + z \geqslant 0)$. Celle-ci s'interprète comme le volume du polyèdre obtenu en découpant le cube le long du plan $x + y + z = 0$. La section du cube le long de ce plan est un hexagone régulier dont les sommets sont les milieux de certaines des arêtes du cube.



Section hexagonale du cube.

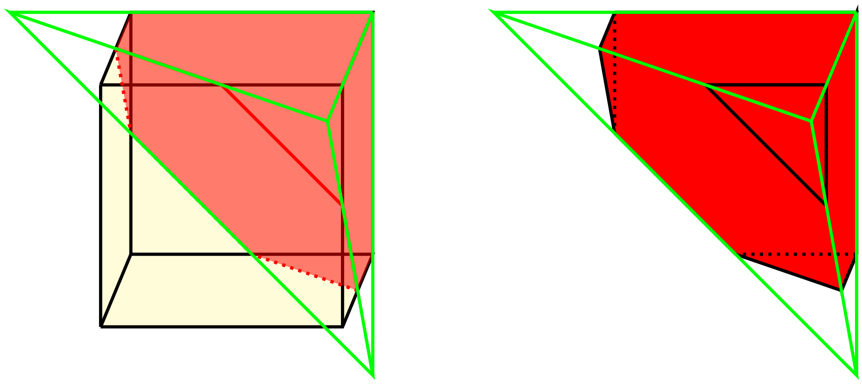
Le polyèdre dont on cherche à calculer le volume est alors la partie du cube en haut à droite de cette section. En fait, par symétrie, ce volume doit être $1/2$ (les deux parties délimitées par la section hexagonale sont isométriques et ont donc le même volume), mais nous allons donner un calcul plus compliqué qui nous préparera pour le problème qui nous préoccupe.





Volume $= 1/2$.

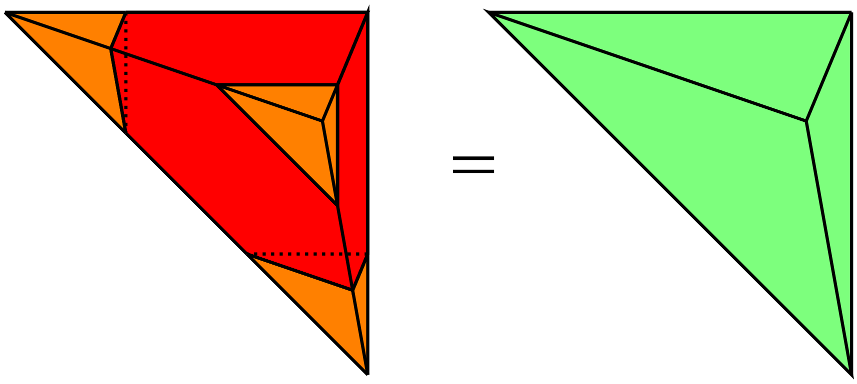
D'abord, remarquons que le polyèdre à la forme étrange que nous considérons est inclus dans un tétraèdre, dont les sommets sont $\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



On voit directement que ce tétraèdre vert est congruent au tétraèdre bleu que nous considérions plus haut (les deux sont des pyramides à base triangulaire équilatérale, et leurs faces « latérales » sont des triangles isocèles rectangles), mais le vert est 1, 5 fois plus grand que le bleu (son petit côté mesure 3/2, alors que celui du bleu était un côté du cube et mesurait donc 1). On a donc

$$\text{volume du tétraèdre vert} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \text{volume du tétraèdre bleu} = \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{16}.$$

En regardant la figure de plus près, on observe que le polyèdre rouge est en fait obtenu en enlevant trois « coins » au tétraèdre vert, qui sont eux-mêmes des tétraèdres congruents au tétraèdre bleu :



On obtient donc bien

$$\begin{aligned}\text{volume du polyèdre rouge} &= \text{volume du polyèdre vert} - 3 \cdot \text{volume d'un tétraèdre orange}\\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{27}{8} - \frac{3}{8}\right)\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Retour au cas $\mathrm{N} = 20$

Reprenons maintenant le cas qui nous intéresse : nous avons vingt nombres aléatoires x_1, $x_2, \ldots, x_{20}$ (avec nos notations précédentes, $x_i = \ell'_i$ pour $i \leqslant 10$ et $x_i = f'_{i-10}$ pour $i \geqslant 11$) et nous voulons déterminer la probabilité $\mathrm{P}(\Sigma \geqslant 8)$, où

$$\Sigma = x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}.$$

Comme à la section précédente, on peut voir $(x_1, \ldots, x_{20})$ comme un point aléatoire du produit $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{20}$. Cet ensemble est l'analogue 20-dimensionnel du cube unité. Comme la longueur de son côté est 1, son volume (20-dimensionnel) est

$$\mathrm{vol}_{20}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = 1^{20} = 1.$$

Un calcul préliminaire. Avant de nous attaquer au cas de l'événement $[\Sigma \geqslant 8]$ (qui est un analogue du polyèdre rouge de la partie précédente), commençons par le cas plus simple de $[\Sigma \geqslant 9]$.

L'événement $[\Sigma \geqslant 9]$ correspond à la partie

$$\mathrm{S} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{20}) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^{20} \middle| \, x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} \geqslant 9 \right\},$$

c'est-à-dire aux points $(x_1, \ldots, x_{20})$ soumis aux inégalités

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant 20, -\frac{1}{2} \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} \geqslant 9.$$

C'est un polyèdre 20-dimensionnel (chaque inégalité définit un demi-espace, c'est-à-dire une région délimitée par un plan 19-dimensionnel, donc la réunion de ces demi-espaces est un polyèdre).

Remarquons que l'inégalité $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} \geqslant 9$ entraîne en fait $\forall i, x_i \geqslant -\frac{1}{2}$: si l'un des x_i, disons x_1, vérifie $x_1 < -\frac{1}{2}$, on aura

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} \leqslant x_1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \leqslant x_1 + 9{,}5 < 9.$$

Ainsi, on peut réécrire

$$\mathrm{S} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{20}) \,\middle|\, \forall i, x_i \geqslant -\frac{1}{2} \text{ et } x_1 + \cdots + x_{20} \geqslant 9 \right\}.$$

Cette région est l'analogue du polyèdre bleu de la partie précédente : c'est un **simplexe** 20-dimensionnel, un polyèdre à 21 sommets et 21 « faces » 19-dimensionnelles (correspondant aux 21 inégalités).

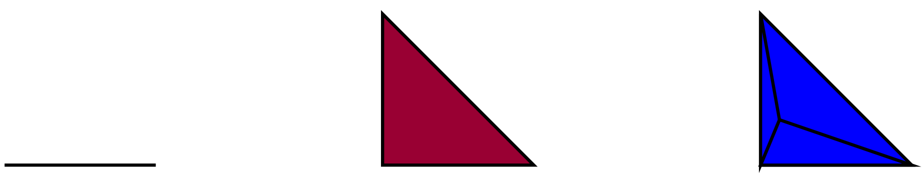
Proposition. Le volume de S est

$$\mathrm{vol}_{20}(\mathrm{S}) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots 20} = \frac{1}{20!}.$$

Preuve. — Pour $n \geqslant 1$, on note

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_n &= \left\{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in [0,1]^n \,\middle|\, y_1 + \cdots + y_n \leqslant 1 \right\} \\ &= \left\{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall i, y_i \geqslant 0 \text{ et } y_1 + \cdots + y_n \leqslant 1 \right\}. \end{aligned}$$

On remarque que, via le changement de variables $y_i = \frac{1}{2} - x_i$, le polyèdre S est isométrique à T_{20}. Ainsi, il s'agit de déterminer le volume n-dimensionnel $\mathrm{vol}_n(\mathrm{T}_n)$.



T_1 : longueur $= 1$ $\quad$ T_2 : aire $= 1/2$ $\quad$ T_3 : volume $= 1/6$

On peut en fait montrer que $\mathrm{vol}_n(\mathrm{T}_n) = \dfrac{1}{n!}$ par récurrence. Pour cela, nous allons calculer le volume n-dimensionnel de T_n en intégrant le volume $(n-1)$-dimensionnel de ses « tranches ». Pour cela, remarquons que cette tranche

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n \cap \left\{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, y_n = t\right\} &= \left\{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall i < n, 0 \leqslant y_i \leqslant 1 \\ y_1 + \cdots + y_n \leqslant 1 \\ y_n = t \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, 1) \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall i < n, 0 \leqslant y_i \leqslant 1 \\ y_1 + \cdots + y_{n-1} \leqslant 1 - t \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

est en fait l'image de T_{n-1} par l'application $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \mapsto ((1-t)z_1, \ldots, (1-t)z_{n-1}, t)$ qui multiplie les distances par $1-t$. En particulier, on a $\mathrm{vol}_{n-1}\left(\mathrm{T}_n \cap \{z_n = t\}\right) = (1-t)^{n-1} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{T}_{n-1})$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(\mathrm{T}_n) &= \int_0^1 \mathrm{vol}_{n-1}\left(\mathrm{T}_n \cap \{z_n = t\}\right) dt \\
&= \int_0^1 (1-t)^{n-1} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{T}_{n-1})\, dt \\
&= \left(\int_0^1 (1-t)^{n-1}\, dt \right) \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{T}_{n-1}) \\
&= \left(\int_0^1 \tau^{n-1}\, d\tau \right) \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{T}_{n-1}) \quad \text{(changement de variable } \tau = 1 - t\text{)} \\
&= \frac{1}{n} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{T}_{n-1}),
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve par récurrence. □

En particulier, on obtient bien la probabilité

$$\mathrm{P}(x_1 + \cdots + x_{20} \geqslant 9) = \frac{1}{20!} \approx 4 \cdot 10^{-19}.$$

Fin du calcul. Pour calculer $\mathrm{P}(x_1 + \cdots + x_{20} \geqslant 8)$, nous allons en fait utiliser la même approche que dans le cas $\mathrm{N} = 3$, c'est-à-dire écrire le polyèdre (l'analogue du polyèdre rouge)

$$\mathrm{P} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{20}) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^{20} \,\middle|\, x_1 + \cdots + x_{20} \geqslant 8 \right\}$$

comme différence entre un grand polyèdre (l'analogue du tétraèdre vert) et plusieurs petits polyèdres (les analogues des tétraèdres oranges). En fait, tous seront semblables au simplexe S.

Déjà,

$$\mathrm{P} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{20}) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^{20} \,\middle|\, x_1 + \cdots + x_{20} \geqslant 8 \right\} \subseteq \left\{ (x_1, \ldots, x_{20}) \in \mathbb{R}^{20} \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall i \leqslant 20, x_i \leqslant 1/2 \\ x_1 + \cdots + x_{20} \geqslant 8 \end{array} \right\},$$

et, via l'application envoyant (x_i) sur (y_i), avec $y_i = \dfrac{1}{2} - x_i$, ce dernier polyèdre est isométrique à

$$\left\{ (y_1, \ldots, y_{20}) \in \mathbb{R}^{20} \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall i \leqslant 20, y_i \geqslant 0 \\ y_1 + \cdots + y_{20} \leqslant 2 \end{array} \right\} = 2 \cdot \mathrm{T}_{20}$$

donc son volume est

$$\mathrm{vol}_{20}(2\cdot \mathrm{T}_{20}) = 2^{20}\cdot \mathrm{vol}_{20}(\mathrm{T}_{20}) = \frac{2^{20}}{20!} \approx 4\cdot 10^{-13}.$$

Notons qu'à ce stade, on peut déjà répondre à la question du titre : le volume de P (et donc la probabilité que Fignon ait été injustement privé d'une victoire légitime) est inférieure à ce nombre $\frac{2^{20}}{20!} \approx 4\cdot 10^{-13}$, qui représente une probabilité parfaitement négligeable (elle est par exemple inférieure à la probabilité de jouer quarante fois à pile ou face et de tomber sur pile à chaque fois ou à celle de tirer 13 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes et d'obtenir tous les cœurs). **Greg LeMond peut dormir sur ses deux oreilles.** Il mérite sans aucun doute sa victoire.

Nous pouvons maintenant terminer le calcul exact : notons P′ le polyèdre contenant P dont nous venons de calculer le volume. La différence entre P et P′ est constituée des points $(x_1,\dots,x_{20})$ avec $x_i \leqslant 1/2$ tels que $x_1+\cdots+x_{20} \geqslant 8$, **dont au moins une coordonnée est** $< -1/2$. On remarque directement que dans ce cas, une seule des coordonnées est $\leqslant -1/2$ (et elle est alors comprise entre $-3/2$ et $-1/2$). Ainsi, le volume de $\mathrm{P}'\setminus \mathrm{P}$ est égal à vingt fois le volume de[4]

$$\left\{ (x_1,\dots,x_{19},x_{20})\in\mathbb{R}^{20} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall i<20, -1/2\leqslant x_i\leqslant 1/2 \\ -3/2\leqslant x_{20}\leqslant -1/2 \\ x_1+\cdots+x_{20}\geqslant 8 \end{array} \right\}.$$

Ce polyèdre est simplement l'image de S par la translation de vecteur $-\vec{e}_{20}$: son volume est donc également $1/20!$. Ainsi, la probabilité cherchée est

$$\mathrm{P}(x_1+\cdots+x_{20}\geqslant 8) = \mathrm{vol}_{20}(\mathrm{P}) = \mathrm{vol}_{20}(\mathrm{P}') - 20\,\mathrm{vol}_{20}(\mathrm{S}) = \frac{2^{20}-20}{20!}.$$

4. Encore une fois, on a remplacé l'inégalité stricte $x_{20} < -1/2$ par $x_{20} \leqslant -1/2$ puisque cela ne change pas le volume.