

---

## Série de pile ou face

---

### Question

Lassés du pile ou face classique, Alice et Bob cherchent à en créer une variante. Alice propose la procédure suivante à Bob : elle jettera la pièce 11 fois et Bob 10 fois et le joueur obtenant le plus de pile gagnera. Pour compenser son lancer supplémentaire, Alice perdra en cas d'égalité.

Bob doit-il accepter cette procédure ?

### Réponse

La nouvelle procédure est en fait équitable : Bob peut l'accepter ou la refuser au gré de sa fantaisie.

Pour nous en convaincre, analysons la situation après qu'Alice et Bob ont lancé la pièce 10 fois chacun (c'est-à-dire avant le dernier lancer d'Alice). À ce moment-là, trois situations peuvent se produire :

- Il est possible qu'Alice ait déjà obtenu strictement plus de fois pile que Bob. Dans ce cas, elle est sûre de gagner, car son dernier lancer ne peut qu'aggraver la situation de Bob.
- De façon symétrique, il est possible que Bob ait obtenu strictement plus de fois pile qu'Alice. Dans ce cas, Bob gagnera nécessairement, car Alice ne peut pas espérer faire mieux qu'égaliser, ce qui donne la victoire à Bob.
- Enfin, il est possible qu'Alice et Bob aient obtenu le même nombre de fois pile. Dans ce cas, le dernier lancer d'Alice désignera le vainqueur : ce sera Alice si la pièce tombe sur pile et Bob si elle tombe sur face. Leurs chances sont donc les mêmes.

Que donne cette disjonction de cas au niveau des probabilités ? Par symétrie, il est évident que les deux premières options ont la même probabilité, que l'on notera  $p$  (et que l'on n'a pas besoin de calculer) et donc que la troisième a une probabilité de  $1 - 2p$ .

Alice gagne donc avec une probabilité

$$\begin{aligned} P(\text{Alice gagne}) &= P(\text{première option}) + \frac{1}{2} \times P(\text{troisième option}) \\ &= p + \frac{1 - 2p}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$