Un hommage à Sophie Germain

Question

À l'occasion de la journée Sophie Germain ayant lieu demain à l'Institut Henri Poincaré (avec notamment le lancement du timbre à son effigie), la question du jour est un résultat qui lui est attribué.

Montrer que pour tout $n > 1$, le nombre $n^4 + 4$ n'est pas premier.

Réponse

La réponse tient en une ligne :

$$n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

(Évidemment, il faut aussi dire que si $n \geqslant 2$, alors $n^2 \geqslant 2n$ donc les deux facteurs sont au moins égaux à 2, et la factorisation n'est pas triviale.)

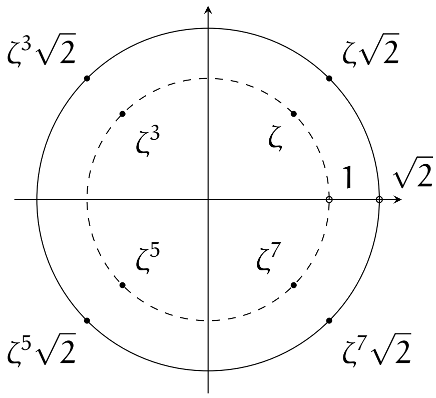
Même si la factorisation ci-dessus se démontre directement en développant, il peut être intéressant d'expliquer comment on peut l'obtenir sans la connaître *a priori*. Donnons deux arguments différents.

1. Une méthode efficace quoique détournée pour factoriser un entier ou une expression algébrique repose sur l'identité remarquable $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (c'est peut-être la meilleure façon de se souvenir que $91 = 100 - 9$ n'est pas premier, par exemple !) Cette méthode s'applique ici assez directement :

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2). \end{aligned}$$

2. Si l'on veut retrouver la formule sans faire appel à aucune astuce de quelle sorte que ce soit, l'approche la plus systématique est de factoriser le polynôme $X^4 + 4$ d'abord dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$. Si on note $\zeta = \zeta_8 = \exp\left(\frac{2i\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (de telle sorte que les racines huitièmes de l'unité soient exactement les puissances de ζ, et donc que les racines quatrièmes de -1 soient exactement ζ, ζ^3, ζ^5, ζ^7), les racines du polynôme sont les nombres $\zeta\sqrt{2}$, $\zeta^3\sqrt{2}$, $\zeta^5\sqrt{2}$ et $\zeta^7\sqrt{2}$, ce qui donne la factorisation

$$X^4 + 4 = \left(X - \zeta\sqrt{2}\right)\left(X - \zeta^3\sqrt{2}\right)\left(X - \zeta^5\sqrt{2}\right)\left(X - \zeta^7\sqrt{2}\right).$$



Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}$, il faut maintenant regrouper les racines conjuguées ; on obtient alors les facteurs

$$\left(X-\zeta\sqrt{2}\right)\left(X-\zeta^7\sqrt{2}\right)=X^2-2X+2$$
$$\left(X-\zeta^3\sqrt{2}\right)\left(X-\zeta^5\sqrt{2}\right)=X^2+2X+2,$$

ce qui démontre bien l'identité recherchée :

$$X^4+4=(X^2-2X+2)(X^2+2X+2).$$

Remarque. Sous la forme

$$a^4+4b^4=(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2),$$

cette identité est connue sous le nom d'*identité de Sophie Germain*, cf. par exemple le livre *Solutions d'expert* d'Arthur Engel (éditions Cassini, 2007).

Sophie Germain (1776-1831) a effectivement démontré (par une autre méthode) que les nombres de la forme n^4+1 n'étaient jamais premiers, cf. par exemple le site *Theorem of the day* et les références qu'il contient.