
Parties de tennis

Question

Roger est un joueur de tennis de très haut niveau, Éric un joueur du dimanche. On vous propose de jouer trois parties contre les deux, alternativement, et de vous donner un prix si vous gagnez deux parties consécutives. Avez-vous intérêt à jouer Roger, Éric puis Roger, ou Éric, Roger puis Éric ?

Réponse

Il peut être tentant d'imaginer que jouer le meilleur joueur une seule fois est un bon calcul, mais on va voir que ce raisonnement est faux.

Notons p_R la probabilité de gagner un match contre Roger et p_E celle de gagner contre Éric. On suppose que les résultats des trois parties sont indépendants. Naturellement, l'hypothèse sur les forces respectives de vos deux adversaires se traduit par l'inégalité $p_R < p_E$.

Pour gagner deux parties consécutives, il y a trois possibilités, mutuellement disjointes :

- gagner les trois parties ;
- gagner les deux premières parties et perdre la troisième ;
- perdre la première partie et gagner les deux dernières.

Dans l'hypothèse où vous jouez Éric deux fois, cela donne donc votre probabilité de gagner le prix :

$$\begin{aligned}
 P(\text{gagner le prix en jouant } \acute{E}R\acute{E}) &= p_E \cdot p_R \cdot p_E + p_E \cdot p_R \cdot (1 - p_E) + (1 - p_E) \cdot p_R \cdot p_E \\
 &= p_E^2 p_R + 2p_E p_R (1 - p_E) \\
 &= p_E p_R (p_E + 2(1 - p_E)) \\
 &= p_E p_R (2 - p_E).
 \end{aligned}$$

De la même façon, un calcul symétrique prouve que

$$P(\text{gagner le prix en jouant } R\acute{E}R) = p_E p_R (2 - p_R).$$

Comme $p_R < p_E$, on a $2 - p_R > 2 - p_E$ et

$$p_E p_R (2 - p_R) > p_E p_R (2 - p_E).$$

Ainsi, il vaut mieux jouer le joueur le plus faible au cours de la partie du milieu, même si cela implique de jouer le plus fort deux fois !