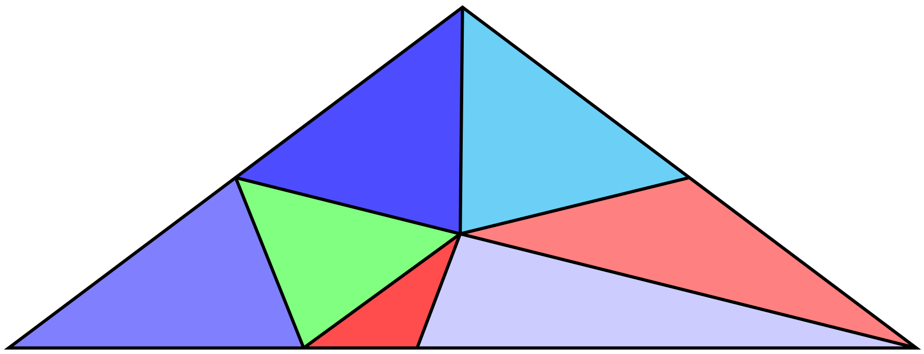
Décomposition en triangles acutangles

Question

On rappelle qu'un triangle est dit *acutangle* si tous ses angles sont aigus, c'est-à-dire *strictement* inférieurs à 90°.

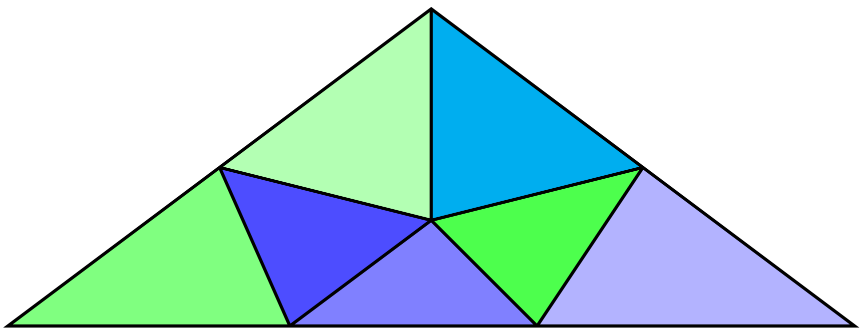
La figure suivante montre la décomposition d'un triangle non acutangle en sept triangles, dont cinq sont acutangles.



Est-il toujours possible de décomposer un triangle en triangles acutangles ? Si oui, quel est le nombre minimum de triangles dans la décomposition ?

Réponse

Évidemment, c'est toujours possible (avec un seul triangle) si le triangle est lui-même acutangle. Pour un triangle dont un angle est obtus ou droit, c'est également possible, et le nombre minimum de triangles utilisés dans la décomposition est sept.



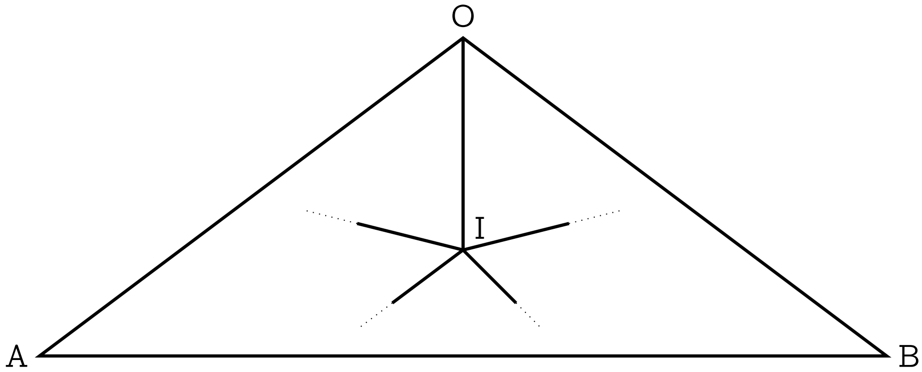
Une solution possible est exprimée par la figure précédente. Nous allons démontrer

- que sept est le nombre minimum de triangles dans une telle décomposition d'un triangle non acutangle ;
- qu'une solution de ce type est possible quel que soit le triangle non acutangle considéré.

Commençons par montrer qu'une solution avec moins de sept triangles n'est pas possible. Soit m le nombre minimal de triangles acutangles utilisés dans une décomposition d'un triangle OAB non acutangle (où O est l'angle droit ou obtus).

Puisque $\widehat{O} \geqslant 90°$, au moins une des arêtes de la décomposition est issue de O. Il est impossible que cette arête se prolonge jusqu'au côté AB : en effet, si tel était le cas (et que l'on appelle D le point d'intersection de AB et de l'arête issue de O), au moins un des triangles AOD et BOD ne serait pas acutangle (en D). On aurait ainsi obtenu un triangle non acutangle décomposable en moins de m triangles, ce qui est absurde. Ainsi, on peut trouver dans notre décomposition un côté OI, où I est un point situé à l'intérieur de I.

Le point I est le sommet commun à $p \geqslant 5$ triangles de la décomposition. En effet, comme chacun de ces triangles a un angle en I strictement inférieur à $90°$ et que la somme de ces angles doit faire $360°$, $p \leqslant 4$ est exclu. Ces triangles forment donc un polygone à p côtés inscrit dans OAB, décomposé en p triangles.



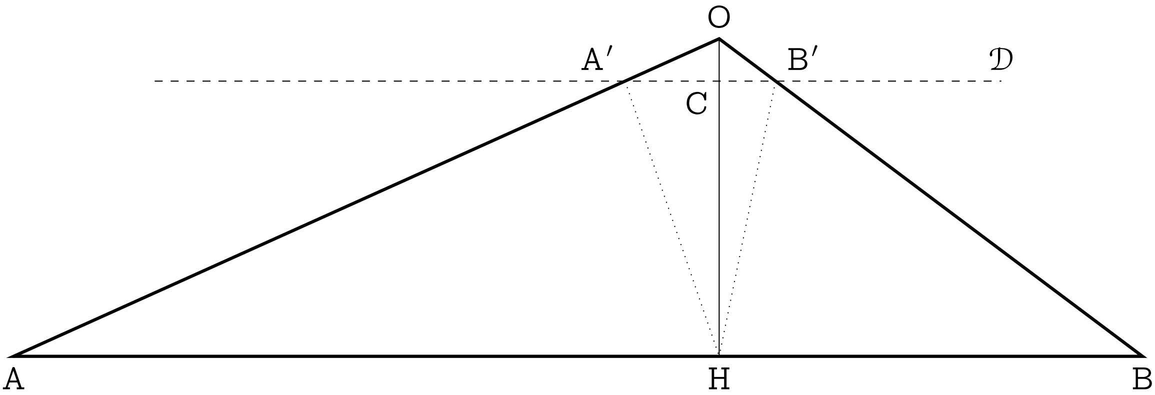
Puisqu'il faut ajouter au moins 2 triangles à un pentagone ou un hexagone pour former un triangle, on a soit $p \geqslant 7$, soit $m \geqslant p+2 \geqslant 7$ et notre décomposition a bien au moins sept triangles.

Démontrons maintenant que notre solution est correcte, quel que soit le triangle. La preuve que nous proposons est un peu compliquée [1], mais elle repose sur une idée assez simple : quand nous déplaçons un peu un point dans une construction géométrique, les grandeurs considérées (distances, angles...) varient peu. En particulier, dans la preuve qui va suivre, nous allons plusieurs fois appliquer cette idée : quand on a une configuration où certains angles sont aigus, il est possible de déplacer un peu certains des points de la figure en préservant cette propriété des angles. On peut ainsi espérer améliorer certains aspects de la configuration sans « casser » ce qui était déjà fait. Cette idée intervient deux fois dans la preuve suivante.

Soit H le pied de la hauteur issue de O. Puisque les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont $< 90°$ (car $\widehat{O}+\widehat{A}+\widehat{B} = 180°$), le point H appartient au segment [AB]. Les triangles AOH et BOH sont rectangles en H donc, en particulier, les angles $\widehat{AOH}$ et $\widehat{BOH}$ sont aigus.

Considérons maintenant une droite $\mathcal{D}$ parallèle à (AB) et située entre (AB) et O. Cette droite rencontre les segments A et B en deux points A' et B'. Plus $\mathcal{D}$ est située près de O, plus les angles $\widehat{AA'H}$ et $\widehat{BB'H}$ diminuent (à la limite, quand les points A' et B' tendent vers O, ces angles tendent vers les angles aigus $\widehat{AOH}$ et $\widehat{BOH}$). En particulier, on peut choisir une fois pour toute notre droite $\mathcal{D}$ telle que $\widehat{AA'H}$ et $\widehat{BB'H}$ soient aigus.

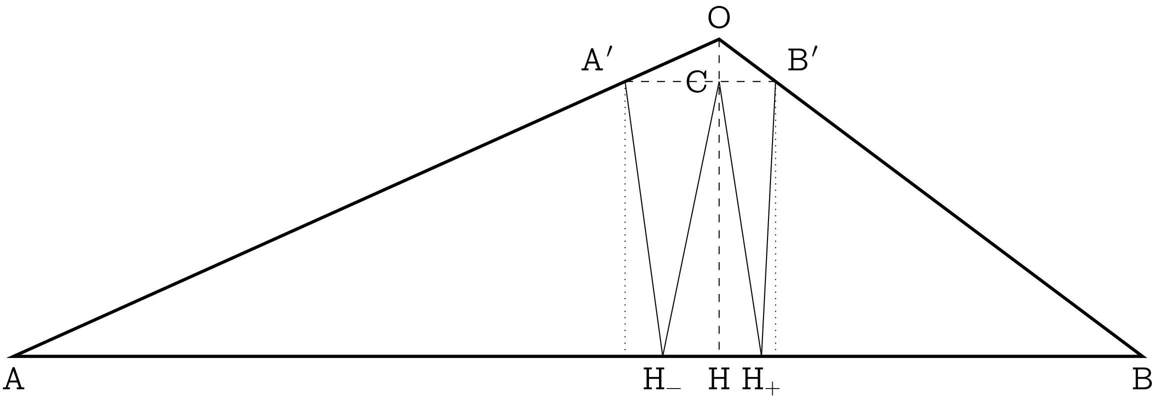
1. Il est fort possible qu'une construction plus simple nous ait échappé. Si vous trouvez une telle construction, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse `culturemath@dma.ens.fr`.



Soit maintenant C l'intersection des segments $[A'B']$ et $[OH]$.

Si H_- est un point de (AB) compris entre H et le projeté orthogonal de A' sur (AB), les angles $\widehat{AA'H_-} \leqslant \widehat{AA'H}$ et $\widehat{AH_-A'}$ sont automatiquement aigus. Comme en outre l'angle $\widehat{H_-CH}$ s'approche de 0 au fur et à mesure que H_- se rapproche de H, on peut supposer $\widehat{H_-CH} < 45°$.

De même on peut construire H_+ (compris entre H et le projeté orthogonal de B' sur (AB)) de telle sorte que $\widehat{H_+CH} < 45°$. On vérifie alors (notamment à l'aide de la propriété des angles alternes-internes) que les cinq triangles AH_-A', BH_+B', H_-CH_+, $A'CH_-$ et $B'CH_+$ sont tous acutangles.



À ce stade, on a presque terminé : on a trouvé une décomposition de OAB en sept triangles dont cinq sont acutangles (AH_-A', BH_+B', H_-CH_+, $A'CH_-$ et $B'CH_+$) et deux rectangles ($A'OC$ et $B'OC$).

Si l'on remplace maintenant le point C par un point C' situé sur le segment $[CH]$, proche de C, on voit que les angles $\widehat{OCA'}$ et $\widehat{OCB'}$ deviennent aigus, alors que tous les autres angles d'un de nos sept triangles sont soit inchangés, soit modifés d'une petite quantité, d'autant plus petite que C' est proche de C. En particulier, on peut choisir C' de telle sorte que les sept triangles AH_-A', BH_+B', $H_-C'H_+$, $A'C'H_-$, $B'C'H_+$, $A'OC$ et $B'OC$ soient acutangles.