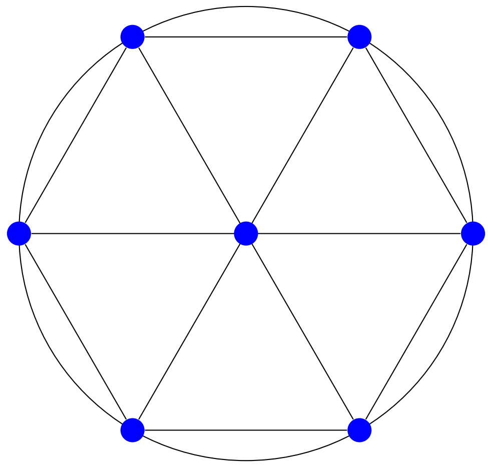
Sept points

Question

Sept points sont placés dans un disque (y compris sur le bord), de telle sorte que la distance entre deux d'entre eux est toujours au moins égale au rayon du cercle. Montrer que l'un d'eux est au centre du cercle.



Réponse

Quitte à faire une homothétie globale, on peut supposer que le cercle est de rayon 1.

Commençons par remarquer que si O est le centre du cercle, deux points A et B (différents de O) tels que $\widehat{AOB} < 60°$ sont nécessairement à distance < 1.

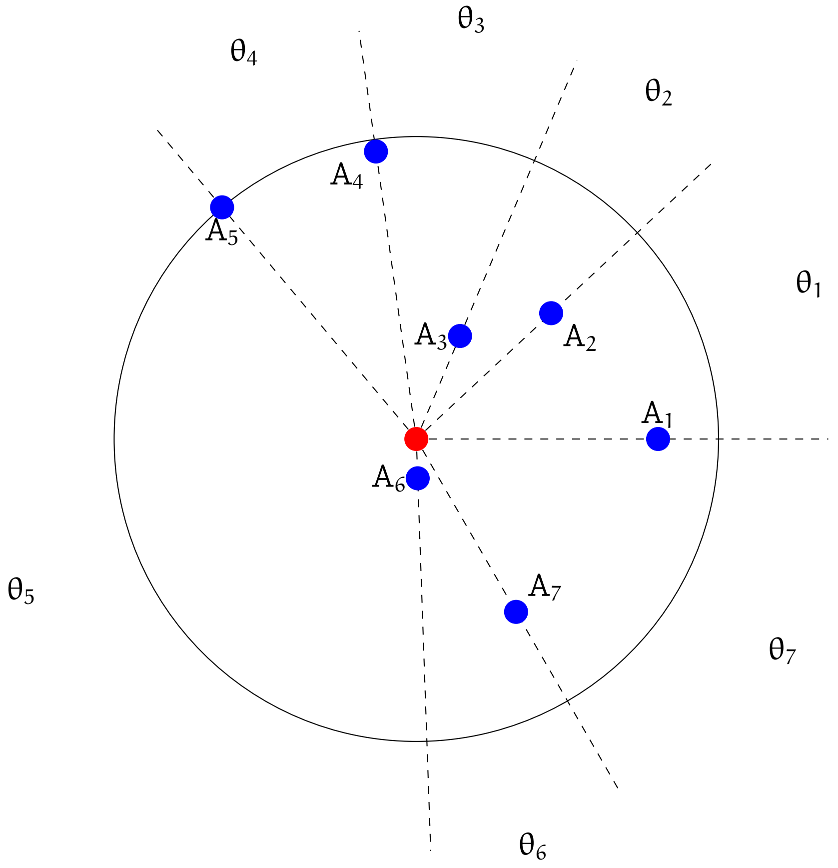
En effet,

$$\begin{aligned}
AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2\,OA\,OB\cos\left(\widehat{AOB}\right) && \text{d'après la relation d'Al-Kashi} \\
&< OA^2 + OB^2 - OA\,OB && \text{car } \widehat{AOB} < 60° \text{ entraîne } \cos\left(\widehat{AOB}\right) > 1/2 \\
&\leqslant OA + OB - OA\,OB && \text{car } OA,\ OB \leqslant 1 \\
&= 1 - (1 - OA)(1 - OB) \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Cela permet de conclure : en effet, si les sept points étaient tous différents du centre du cercle, en les appelant $A_1, A_2, \dots, A_7$ dans l'ordre trigonométrique, on obtiendrait sept angles

$$\theta_i = \widehat{A_iOA_{i+1}} \qquad (\text{avec } \theta_7 = \widehat{A_7OA_1})$$

dont la somme vaut $360°$.



Notons qu'il est impossible d'avoir deux points sur le même rayon, puisqu'ils seraient alors automatiquement à distance < 1. Nos angles θ_i sont donc strictement positifs (mais cela n'a à vrai dire pas d'impact sur la suite de la démonstration).

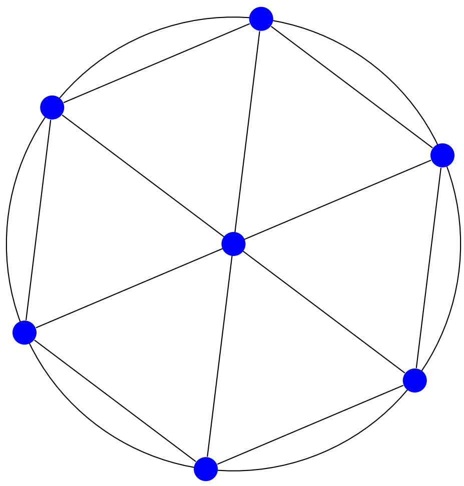
Puisque la somme de ces sept angles vaut $360°$, au moins l'un d'entre eux, appelons-le θ_i, vérifie

$$\theta_i \leqslant \frac{360°}{7} < 60°.$$

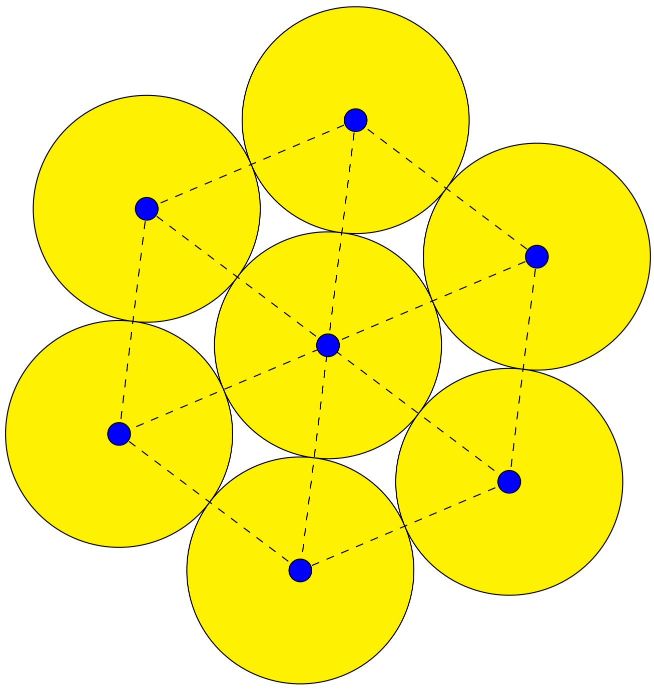
D'après ce qui précède, les points A_i et A_{i+1} correspondant (A_7 et A_1 si $i = 7$) sont donc à distance < 1, ce qui est une contradiction. On a donc bien montré que l'un des points était au centre du cercle.

Remarque

Même quand l'un des points du cercle est au centre (appelons-le O), les autres points $(A_1, \ldots, A_6)$ continuent à définir six angles dont la somme vaut $360°$. Si l'on suit alors le même raisonnement que pour répondre à la question, on voit alors que la condition que les points doivent être à distance au moins 1 implique que tous les $\widehat{A_iOA_{i+1}}$ valent $60°$ et que toutes les longueurs OA_i valent 1. En fait, la situation est alors, à une rotation près, la situation présentée dans l'énoncé.

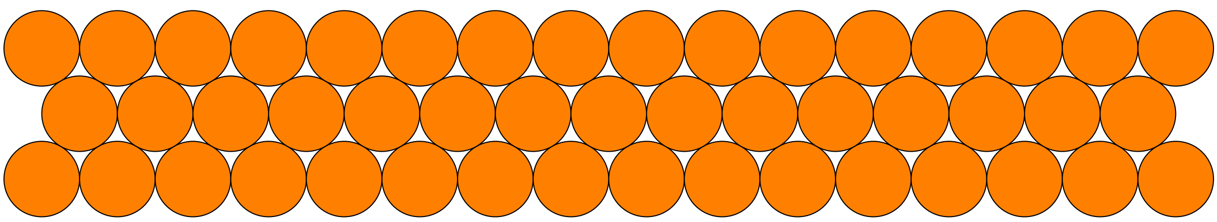


Une manière plus « physique » de présenter cette propriété est de tracer les disques de rayon $1/2$ centrés en chacun des points.



La propriété sur la distance minimale entre ces points revient maintenant à dire que les disques ne se chevauchent pas, et l'on vient de montrer que de toutes les manières d'empiler ainsi sept disques, l'empilement « naturel » (que l'on appelle empilement triangulaire ou hexagonal pour des raisons évidentes) est le seul à avoir la propriété que les sept centres soient dans un même disque de rayon 1.

En fait, quelle que soit la définition que l'on cherche à donner d'un empilement « optimal », l'empilement hexagonal est toujours l'unique réponse.



En revanche, les questions correspondantes en dimension supérieure sont beaucoup plus difficiles et forment en fait un sujet de recherche actif. Donnons deux exemples de résultats frappants.

- En dimension trois, il est impossible d'empiler des boules de même volume de façon plus dense que la façon « intuitive » (correspondant au *réseau cubique à faces centrées* de la cristallographie). C'est un résultat conjecturé par l'astronome Kepler au dix-septième siècle et démontrée par le mathématicien américain Thomas Hales en 1998. L'histoire de cette preuve et du rapport qu'elle entretient avec l'informatique est fascinante. On pourra en apprendre plus sur la page wikipédia consacrée à la conjecture de Kepler et en lisant l'introduction du livre (en anglais) de Hales consacré à sa deuxième preuve.
- La propriété que l'on a montrée dans ce document dit essentiellement que la seule façon pour qu'un disque touche six autres disques de même taille est celle donnée par le réseau hexagonal. Cette propriété de « rigidité » n'est pas vraie en dimension trois : la figure formée par une boule du réseau cubique à faces centrées et ses douze voisines est extrêmement flexible au sens où il y a beaucoup de manières de modifier cette configuration sans changer le fait que la boule centrale touche toutes les autres. En revanche, on connaît en dimension supérieure deux réseaux (Le réseau E_8 en dimension 8 et le réseau de Leech en dimension 24) possédant cette propriété de rigidité. On pourra consulter leurs pages wikipedia en anglais (ici pour E_8 et là pour le réseau de Leech) ou le blog de David Madore (E_8 et Leech) pour de brèves introductions à leurs merveilleuses propriétés.