SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publ. d. l: Annales math. de Leipsic t. IV pag. 139).

Dans le 72^ième^ tome du Journ. de M. BORCHARDT je démontre un théorème ayant pour objet le décroissement des coefficients de séries trigonométriques sous certaines conditions. Dans ce qui suit je voudrais en développer la démonstration d'une manière, qui ne laisse rien à désirer par rapport à la clarté et la simplicité. C'est du dernier des théorèmes proposés ici, qu'il est question, les autres me serviront comme préparatoires.

I. *Soit:*

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$$

une série infinie de quantités positives, soumises aux conditions:

$$x_2 \geqq kx_1, \; x_3 \geqq k^2x_2, \ldots, x_\nu \geqq k^{\nu-1}x_{\nu-1}, \ldots$$

où k est une donnée positive plus grande que 1, *il y a toujours des nombres réels Ω, qui ont un tel rapport avec la série donnée, que le produit $x_\nu\Omega$ diffère d'un nombre impair $2y_\nu + 1$ d'une quantité θ_ν, qui devient infiniment petite lorsque ν croît infiniment; et même la quantité Ω peut être prise dans un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ proposé d'avance à volonté.*

Démonstration. Je désigne la grandeur de l'intervalle proposé $(\alpha \ldots \beta)$ par i et je suppose α et β positives toutes les deux, et on peut ramener les autres cas à celui-là. Qu'on divise l'intervalle en trois parties égales; les points de division étant γ et δ, on a:

$$\alpha\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = \frac{i}{3}.$$

Soit x_n la première des quantités infiniment croissantes x_ν, qui est plus grande que les deux quantités données $\frac{3}{(k-1)i}$ et $\frac{6}{i}$.

Prenons d'abord le nombre impair $2y_n + 1$ tel, que la fraction $\frac{2y_n+1}{x_n}$ tombe dans l'intervalle $\gamma\delta$; ce qui se peut, puisque $x_n > \frac{6}{i}$.

Puis déterminons les nombres impairs $2y_{n+1} + 1$, $2y_{n+2} + 1$, ... tels que:

$$\text{(A)} \qquad \begin{gathered} \left[2y_{n+1} + 1 - (2y_n + 1)\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] \leqq 1 \\ \left[2y_{n+2} + 1 - (2y_{n+1} + 1)\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right] \leqq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[2y_\nu + 1 - (2y_{\nu-1} + 1)\frac{x_\nu}{x_{\nu-1}}\right] \leqq 1 \end{gathered}$$

A ces conditions je joins, pour faire disparaître toute ambiguité, la règle, qu'on prenne le plus petit toutes les fois qu'il y a deux nombres $2y_\nu + 1$, qui s'accommodent à la condition (A); on a alors une série complètement déterminée de nombres impairs $2y_\nu + 1$, pour $\nu \geqq n$; quant aux nombres $2y_\nu + 1$ pour $\nu < n$, nous pouvons les prendre à volonté.

Les nombres x_ν et y_ν déterminent maintenant une série infinie:

$$\text{(B)} \qquad \frac{2y_1 + 1}{x_1}, \frac{2y_2 + 1}{x_2}, \dots \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}, \dots$$

dont le terme général s'approche infiniment d'une limite, que je nomme Ω.

En effet d'après les conditions (A) on a:

$$\left[\frac{2y_{\nu+\mu} + 1}{x_{\nu+\mu}} - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right] \leqq \frac{1}{x_\nu} + \frac{1}{x_{\nu+1}} + \dots$$

et puisque la somme à droite devient infiniment petite en faisant croître ν, la même chose a lieu par rapport à la différence $\frac{2y_{\nu+\mu} + 1}{x_{\nu+\mu}} - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$

dans laquelle le nombre μ peut être pris à volonté. Mais on sait que cette condition étant remplie, la limite $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$ existe toujours. C'est cette limite que nous nommons Ω.

Des conditions (A) pour $\nu \geqq n$ on tire pour Ω la relation:

$$\left[\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right] \leqq \frac{1}{x_{\nu+1}} + \frac{1}{x_{\nu+2}} + \ldots.$$

où:

$$[\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] \leqq \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} + \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} \cdot \frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu+2}} + \ldots.$$

Mais on a:

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} \leqq \frac{1}{k^\nu}, \quad \frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu+2}} \leqq \frac{1}{k^{\nu+1}}, \ldots.$$

On a donc aussi:

$$[\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] \leqq \frac{1}{k^\nu} + \frac{1}{k^{2\nu+1}} + \frac{1}{k^{3\nu+3}} + \ldots.$$

et à plus forte raison:

$$\text{(C)} \qquad [\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] < \frac{1}{k^\nu - 1};$$

k étant > 1 on voit par là que la différence:

$$\theta_\nu = x_\nu \Omega - (2y_\nu + 1)$$

a pour limite zéro pour $\nu = \infty$. Donc la première partie de notre théorème est démontrée.

Il reste à faire voir, que le nombre trouvé Ω se trouve dans l'intervalle donné $(\alpha \ldots. \beta)$; cela résulte aussi de (C), en y faisant $\nu = n$; on a alors:

$$\left[\Omega - \frac{2y_n + 1}{x_n}\right] < \frac{1}{x_n(k^n - 1)}$$

et à plus forte raison

$$\left[\Omega - \frac{2y_n + 1}{x_n}\right] < \frac{1}{x_n(k - 1)}.$$

Mais nous avions pris x_n tel que $\frac{1}{x_n(k-1)} < \frac{i}{3}$; on a donc aussi:

$$\left[\Omega - \frac{2y_n+1}{x_n}\right] < \frac{i}{3}$$

La fraction $\frac{2y_n+1}{x_n}$ étant située dans l'intervalle $\gamma\delta$, la dernière relation montre que Ω est situé dans l'intervalle $(\alpha \ldots . \beta)$.

II. *Une série de nombres réels:*

$$c_1, c_2, \ldots . c_\nu, \ldots .$$

étant telle, que de chaque série y contenue:

$$c_{n_1}, c_{n_2}, \ldots . c_{n_\nu}, \ldots .$$

l'on peut toujours enlever une troisième:

$$c_{n_{m_1}}, c_{n_{m_2}}, \ldots . c_{n_{m_\nu}}, \ldots .,$$

dont le terme général $c_{n_{m_\nu}}$ *devient infiniment petit pour* $\nu = \infty$, *on a toujours:*

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0$$

Démonstration. En considérant une quantité positive ε quelconque, je dis que le nombre des termes c_ν, qui sont plus grands que ε, par rapport à leur valeur absolue, doit être *fini*; car s'il était infini il y aurait une série infinie c_{n_ν}, contenue dans la première c_ν, dont tous les termes seraient plus grands que ε; on ne pourrait donc pas en enlever une troisième $c_{n_{m_\nu}}$, dont les termes deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$, ce qui est contre l'hypothèse.

Il est donc clair que le nombre des termes c_ν, qui sont plus grands qu'une quantité ε, si petite qu'elle soit, est *fini*; mais de là on conclut évidemment que $\lim\limits_{\nu=\infty} c_\nu = 0$.

III. *Lorsque pour chaque valeur de x entre zéro et* $\frac{i}{2}$ *(i etant une quantité donnée positive) on a:*

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin \nu x = 0,$$

on a toujours aussi:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

Démonstration. Soit c_{n_ν} une série quelconque contenue dans la série c_ν; je ferai voir, qu'il y en a toujours une troisième $c_{n_{m_\nu}}$, contenue dans c_{n_ν} et telle, que l'on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} = 0$$

Pour cela j'enlève de la série c_{n_ν} donnée l'autre $c_{n_{m_\nu}}$ à condition, que, le nombre k étant donné et > 1, on ait pour chaque valeur de ν:

$$n_{m_\nu} \geqq k^{\nu-1} n_{m_{\nu-1}}.$$

Il est clair, que cela se peut de diverses manières; prenons-en une déterminée. La série d'indices n_{m_ν} étant prise de sorte qu'on détermine d'après I une quantité Ω, située dans l'intervalle $\left(0 \ldots \frac{i}{\pi}\right)$, et telle, que l'on ait:

$$\Omega n_{m_\nu} - (2y_\nu + 1) = \theta_\nu$$

où y_ν est entier et θ_ν devient infiniment petite pour $\nu = \infty$.

Alors la quantité $\Omega' = \Omega \frac{\pi}{2}$ est située dans l'intervalle $\left(0 \ldots \frac{i}{2}\right)$ et l'on a:

$$\Omega' n_{m_\nu} - \frac{\pi}{2}(2y_\nu + 1) = \frac{\pi}{2}\theta_\nu.$$

D'après l'hypothèse, faite dans notre théorème, en l'appuyant sur le nombre $x = \Omega'$, on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin(\nu\Omega') = 0$$

De là on peut conclure, qu'aussi:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} . \sin(n_{m_\nu}\Omega') = 0.$$

Mais on a: $\sin(n_{m_\nu}\Omega') = \pm \cos\frac{\pi}{2}\theta_\nu$, d'où l'on voit que:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} . \cos\left(\frac{\pi}{2}\theta_\nu\right) = 0.$$

θ_ν étant une quantité qui disparaît pour $\nu = \infty$, on conclut que:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} = 0.$$

Il y a donc dans chaque série c_{n_ν}, contenue dans la première c_ν, une troisième série $c_{n_{m_\nu}}$, contenue dans la seconde, telle que ses termes deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$. D'après le théorème II, on a donc de même:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

IV. *Lorsque pour chaque valeur de x comprise dans un intervalle donné $(\alpha \ldots . \beta)$, la condition:*

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x) = 0$$

est remplie, on a toujours:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0, \qquad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = 0.$$

Démonstration. Soit

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ et } [\beta - \alpha] = i$$

Posons:

$$a_\nu \cos \nu\gamma - b_\nu \sin \nu\gamma = c_\nu$$
$$a_\nu \sin \nu\gamma + b_\nu \cos \nu\gamma = d_\nu$$

On a:

$$a_\nu = c_\nu \cos \nu\gamma + d_\nu \sin \nu\gamma$$
$$b_\nu = - c_\nu \sin \nu\gamma + d_\nu \cos \nu\gamma;$$

d_ν devient infiniment petit pour $\nu = \infty$, par hypothèse, puisque d_ν est ce que devient l'expression $a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x$ pour $x = \gamma$, et que γ est une valeur située entre α et β.

De même c_ν devient aussi infiniment petit pour $\nu = \infty$; car on a, par hypothèse, pour chaque valeur de x positive et $< \frac{i}{2}$:

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu(\gamma + x) + b_\nu \cos \nu(\gamma + x)) = 0$$

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu(\gamma - x) + b_\nu \cos \nu(\gamma - x)) = 0.$$

Par soustraction on en conclut:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin \nu x = 0$$

pour chaque valeur positive de $x < \frac{i}{2}$.

De là on voit d'après le théorème III, que l'on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

Maintenant c_ν et d_ν devenant toutes les deux infiniment petites, il en résulte la même propriété pour a_ν et b_ν.

Berlin, 21 Avril 1871.