FONDEMENTS D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES ENSEMBLES

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Extrait d'un article des Annales mathématiques de Leipsic, t. XXI, pag. 545.)

§ 1.

Dans l'exposition de mes recherches sur la théorie des ensembles, je suis maintenant arrivé à un point où il me faut développer une généralisation de la notion de nombre entier réel, et ce développement m'entraîne dans une direction où personne, à ma connaissance, ne s'est engagé jusqu'à présent.

Je me trouve contraint de développer cette notion de nombre au point que je pourrais à peine, sans cela, avancer dans la théorie des ensembles; que cette nécessité où je me trouve placé me serve de justification ou d'excuse, si cela était nécessaire, pour avoir introduit dans mon travail un ordre d'idées qui y paraît étranger. Car il s'agit de développer cette notion dans le but de continuer la série des nombres entiers réels au-delà de l'infini; si hardie que paraisse cette tentative, je puis exprimer non-seulement l'espoir, mais la ferme conviction qu'avec le temps on considérera ce développement comme très-simple, très-naturelle et parfaitement accessible. En même temps je ne me dissimule pas cependant que par cette entreprise, je me mets en contradiction, dans une certaine mesure, avec les idées généralement répondues sur l'infini mathématique et avec les opinions qu'on a souvent défendues sur l'essence de la grandeur numérique.

Pour ce qui concerne l'infini mathématique, dans la mesure où jusqu'à présent, il a pu être employé légitimement dans la science et contribuer à ses progrès, il me semble qu'il se présente en première ligne dans le sens d'une grandeur variable, croissant au-delà de toute limite ou décroissant autant que l'on voudra, mais restant toujours finie. Je donne à cet infini le nom *d'infini improprement dit.*

Mais dans ces derniers temps il s'est formé, soit dans la géométrie, soit particulièrement dans la théorie des fonctions, un nouveau genre de notions d'infini, tout aussi légitimes; ainsi, d'après ces notions nouvelles, dans la recherche d'une fonction analytique d'une grandeur complexe variable, l'usage s'est imposé généralement de se représenter, dans le plan qui représente la variable complexe, un point unique situé dans l'infini, c. à d. infiniment éloigné, mais néanmoins déterminé, et d'examiner la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de ce point absolument comme dans le voisinage d'un autre point quelconque; on voit alors que la fonction dans le voisinage du point infiniment éloigné, se comporte précisément de la même manière que s'il s'agissait de tout autre point placé dans le fini, en sorte qu'on est pleinement autorisé par là à se représenter l'infini, dans ce cas, comme transporté sur un point tout à fait déterminé.

Quand l'infini se présente sous une forme ainsi déterminée, je l'appelle *infini proprement dit.*

Pour comprendre ce qui va suivre, distinguons bien ces deux formes sous lesquelles s'est présenté l'infini mathématique et sous lesquelles il a contribué aux plus grands progrès dans la géométrie, dans l'analyse, et dans la physique mathématique.

Sous sa première forme *d'infini improprement dit,* il se présente comme un fini variable; sous sa seconde forme que j'appelle *l'infini proprement dit,* il se présente comme un infini absolument déterminé. Les nombres réels entiers infinis que je définirai dans la suite et auxquels j'ai été amené il y a déjà de longues années, sans m'être assuré d'y trouver des nombres concrets à sens réel, [1] n'ont absolument rien de commun avec la première de ces deux formes, l'infini improprement dit; ils ont au contraire *le même caractère de détermination* que nous trouvons, dans la théorie des fonctions analytiques, pour le point infiniment éloigné; ils appartiennent donc aux formes et aux affections *de l'infini proprement dit.* — Mais tant que le point reste isolé dans l'infini du plan de nombres complexes en face de tous les points qui sont dans le fini, nous obtenons non-seulement *un* nombre entier infini, mais une suite infinie de ces nombres bien distincts les uns des autres et ayant, soit entre eux, soit avec les nombres entiers finis, des rapports réguliers .....

Ces rapports ne sont guère de ceux que l'on peut, au fond, ramener à des rapports de nombres finis entre eux; ce phénomène a lieu sans doute, mais il ne se présente fréquemment que dans les degrés et les formes diverses de *l'infini improprement dit,* par exemple dans les fonctions d'une variable x qui deviennent infiniment petites ou infiniment grandes, au cas où elles ont des numéros d'ordre finis déterminés en tendant à l'infini. Ces rapports, en fait, ne peuvent être considérés que comme une espèce de rapports du fini, ou comme pouvant s'y ramener immédiatement; les lois relatives aux *nombres entiers proprement infinis* sont par contre complètement différentes des dépendances que l'on trouve dans le fini.

Les *deux principes de formation,* à l'aide desquels on définit les nouveaux nombres infinis déterminés, comme on pourra s'en convaincre, sont tels qu'en les appliquant ensemble, on peut dépasser toutes les limites dans la formation abstraite des nombres entiers réels; mais heureusement on a d'autre part, comme nous le verrons, un *troisième* principe que j'appelle *principe d'arrêt* ou de *limitation,* et grâce auquel on peut donner certaines limites successives au procédé de formation qui est absolument sans fin; nous obtiendrons ainsi, dans la suite *absolument infinie* des nombres réels entiers, des *divisions naturelles,* que j'appellerai *classes de nombres.*

La *première classe de nombres* (I) est le système des nombres entiers finis $1, 2, 3, \ldots\ldots \nu, \ldots\ldots$; vient ensuite la seconde classe de nombres (II), composée de certains nombres entiers infinis α se suivant entre eux dans un ordre de succession déterminé:

---

[1] Je les ai appelés jusqu'à présent: »Symboles d'infini définis d'une façon déterminée«, v. Ann. math. t. XVII, p. 357, t. XX, p. 113, t. XXI, p. 54.

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ 2\omega,\ 2\omega+1,\ \ldots,\ \nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu,\ \ldots,\ \omega^\omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots,\ \alpha,\ \ldots;$$

la seconde classe de nombres une fois définie, on arrive à la troisième, puis à la quatrième, et ainsi de suite.

L'introduction de ces nouveaux nombres entiers me paraît tout d'abord très-importante pour développer et affermir la notion de *puissance* que j'ai fait entrer dans mes travaux (J. de BORCHARDT, t. 77, p. 257; t. 84, p. 242) et que j'ai souvent employée dans les premiers numéros du présent travail. D'après cela, à tout système bien défini convient une puissance déterminée, et deux systèmes ont la même puissance, quand on peut établir entre elles, d'élément à élément, une correspondance réciproque à sens unique.

Dans les systèmes finis la *puissance* s'accorde avec le *nombre* des éléments, parce que ces systèmes ont, comme on sait, dans tous les arrangements, le même nombre d'éléments.

Pour les systèmes infinis au contraire, il n'avait été question généralement jusqu'ici, ni dans mes travaux ni ailleurs, d'un *nombre* d'éléments *défini avec précision,* mais on pouvait bien leur attribuer aussi une *puissance déterminée, et complètement indépendante de l'ordre de leurs éléments.*

Il fallait, comme il était facile de le faire voir, concéder la plus petite puissance des systèmes infinis aux ensembles capables d'avoir la correspondance réciproque à sens unique avec la *première* classe de nombres et ayant par suite la même puissance qu'elle. Mais jusqu'à présent on n'avait pas pour les *puissances supérieures,* une définition aussi simple et aussi naturelle.

Les classes de nombres entiers réels infinis déterminés nous apparaissent maintenant comme représentant naturellement, et sous une forme unie la *suite régulière des puissances croissantes de systèmes bien définis.* Je montre de la manière la plus précise que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) ne diffère pas seulement de la puissance de la première classe, mais qu'elle est encore, en réalité, la puissance *immédiatement supérieure;* nous pouvons donc l'appeler *deuxième puissance* ou *puissance de deuxième classe.* On obtient de même, par la *troisième* classe de nombres, la définition de la *troisième puissance, ou puissance de troisième classe, etc. etc.*

§ 11.

Nous avons maintenant à montrer comment on est amené aux définitions de ces nouveaux nombres et de quelle manière on obtient, dans la suite des nombres entiers réels absolument infinie, les divisions naturelles que j'appelle *classes de nombres.* La série (I) des nombres entiers réels positifs $1, 2, 3, \ldots\ldots \nu, \ldots\ldots$ doit sa formation à la répétition et à la réunion d'unités qu'on a prises pour point de départ et qu'on considère comme égales; le nombre ν exprime un nombre fini déterminé de répétitions successives de ce genre, aussi bien que de la réunion des unités choisies en un seul tout. La formation des nombres entiers réels *finis* repose donc sur le principe de l'addition d'une unité à un nombre *déjà formé;* j'appelle *premier principe* de formation ce moment qui, comme nous le verrons bientôt, joue aussi un rôle essentiel dans la production des nombres entiers supérieurs. Le nombre des nombres ν de la classe (I), formé de cette manière, est infini et parmi tous ces nombres il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres. Il serait donc contradictoire de parler d'un nombre maximum de la classe (I); toutefois on peut d'autre part imaginer un nouveau nombre, que nous appellerons ω, et qui *servira à exprimer que tout l'ensemble (I) est donné d'après la loi dans sa succession naturelle.* On peut même se représenter le nouveau nombre ω comme la limite vers laquelle tendent les nombres ν, à condition d'entendre par là que ω sera le *premier* nombre entier qui *suivra tous* les nombres ν, en sorte qu'il faut le déclarer supérieur à *tous* les nombres ν. En associant le nombre ω avec les unités primitives on obtient à l'aide du *premier principe* de formation les nombres plus étendus:

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots\ldots\ \omega + \nu,\ \ldots\ldots;$$

comme par là on n'arrive encore une fois à aucun nombre maximum, on imagine un nouveau, que l'on peut appeler 2ω et qui sera le *premier* après tous les nombres obtenus jusqu'à présent ν et $\omega + \nu$; si on applique encore au nombre 2ω le premier principe de formation, on arrive à continuer comme il suit les nombres obtenus jusqu'à présent:

$$2\omega + 1,\ 2\omega + 2,\ \ldots\ldots\ 2\omega + \nu,\ \ldots\ldots.$$

La fonction logique qui nous a donné les deux nombres ω et 2ω, est évidemment différente du premier principe de formation; je l'appelle *deuxième* principe de formation des nombres réels entiers et je définis mieux ce principe en disant: *Etant donné une succession quelconque déterminée de nombres entiers réels définis, parmi lesquels il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres, on pose, en s'appuyant sur ce deuxième principe de formation, un nouveau nombre que l'on regarde comme la limite des premiers, c. à d. qui est défini comme étant immédiatement supérieur à tous ces nombres.*

En appliquant et en combinant ces *deux principes* de formation on obtient donc successivement les continuations des nombres que nous avons obtenus jusqu'ici, comme il suit:

$$3\omega,\ 3\omega+1,\ \ldots\ldots,\ 3\omega+\nu,\ \ldots\ldots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\mu\omega,\ \mu\omega+1,\ \ldots\ldots,\ \mu\omega+\nu,\ \ldots\ldots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Cependant nous n'en sommes pas venu à la fin, parce que parmi les nombres $\mu\omega+\nu$ il n'y en a pas non plus qui soit plus grand que tous les autres.

Le deuxième principe de formation nous permet donc d'introduire un nombre qui suit immédiatement tous les autres $\mu\omega+\nu$, et que l'on peut appeler ω^2; à ce nombre se rattacheront dans un ordre de succession déterminé:

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu$$

et l'on arrive alors évidemment, en suivant les deux principes de formation, à des nombres de la forme:

$$\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu;$$

mais alors le deuxième principe de formation nous amène à poser un nouveau nombre qui sera immédiatement supérieur à tous ces nombres et qu'on pourra désigner par ω^ω.

La formation de nouveaux nombres, comme on le voit, est *sans fin;* en suivant les deux principes de formation on obtient toujours de nouveaux nombres et de nouvelles séries de nombres, avec une *succession parfaitement déterminée.*

On pourrait donc croire d'abord que nous allons nous perdre à l'indéfini dans cette formation de nouveaux nombres entiers infinis déterminés et que nous ne sommes pas en état *d'arrêter provisoirement* ce procédé sans fin, pour arriver par là à une *limitation semblable à celle que nous avons trouvée, en fait, dans un certain sens, par rapport à l'ancienne classe de nombres* (I); là on n'employait que le premier principe de formation et on ne pouvait pas sortir de la série (I). Mais le deuxième principe de formation ne devait pas seulement conduire au-delà du système de nombres employé jusqu'à présent; il nous apparaît encore certainement comme un moyen qu'on peut combiner avec le premier principe de formation pour arriver à *pouvoir franchir toute limite* dans la formation abstraite des nombres réels entiers.

Mais si nous remarquons maintenant que tous les nombres obtenus jusqu'à présent et ceux qui les suivent immédiatement remplissent une certaine condition, nous verrons que cette condition, *si on la pose comme obligatoire pour tous les nombres à former immédiatement,* nous apparaît comme un *troisième* principe, qui vient s'ajouter aux deux premiers et que j'appelle *principe d'arrêt ou de limitation.* En vertu de ce principe, comme je le montrerai, la deuxième classe de nombres (II), définie par l'adjonction de ce principe, n'acquiert pas seulement une puissance plus élevée que (I), mais *précisément la puissance immédiatement supérieure,* et par conséquent la *deuxième puissance.*

La condition dont nous venons de parler et qui est remplie, comme on peut s'en convaincre immédiatement, par chacun des nombres infinis α définis jusqu'ici, est: *que le système des nombres qui se trouvent, dans la suite des nombres, avant celui qu'on considère* et à partir de 1, soit de la même puissance que la première classe de nombres (I). Prenons, par exemple, le nombre ω^ω, ceux qui le précèdent sont contenus dans la formule:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,$$

où μ, ν_0, ν_1, ... ν_μ peuvent prendre toutes les valeurs finies positives entières, y compris zéro, et à l'exclusion de la combinaison: $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \ldots\ldots = \nu_\mu = 0$.

Comme on le sait, ce système peut se mettre sous forme d'une série *simplement* infinie et il a par conséquent *la même puissance que (I).*

Comme alors toute suite de systèmes dont chacun est de la première puissance, donne toujours lieu, si elle est elle-même de la première puissance, à un nouveau système, qui a la même puissance que (I), il est clair qu'en continuant notre suite de nombres on arrive toujours, en fait, à avoir immédiatement de nouveaux nombres qui *remplissent réellement cette condition.*

Nous définissons donc la deuxième classe de nombres (II): l'ensemble de tous les nombres α qu'on peut former à l'aide des deux principes de formation, qui se succèdent suivant un ordre déterminé:

$$\omega,\ \omega+1,\ \ldots\ldots,\ \nu_0\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu},\ \ldots\ldots,\ \omega^{\omega},\ \ldots$$
$$\ldots\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \ldots\ldots,\ \alpha,\ \ldots\ldots$$

et qui sont soumis à cette condition, que tous les nombres qui précèdent le nombre α, à partir de 1, forment un système de la même puissance que la classe de nombres (I).

§ 12.

Nous avons à démontrer tout d'abord ce théorème que: *la nouvelle classe de nombres (II) a une puissance différente de celle de la première classe de nombres (I).*

Ce théorème résulte du suivant:

»*Soit* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots\ldots$ *un système quelconque de la première puissance, de divers nombres de la deuxième classe de nombres (en sorte que nous sommes autorisés à les mettre sous la forme de série simple* (α_ν)*), ou il y a un de ces nombres qui est plus grand que tous les autres, soit* γ*; ou bien, si ce n'est pas le cas, il y a un nombre déterminé* β *de la deuxième classe (II) qui ne se rencontre pas parmi les nombres* α_ν*, en sorte que* β *est plus grand que tous les* α_ν *et que par contre tout nombre entier* $\beta' < \beta$ *est inférieur en grandeur à certains nombres de la série* (α_ν)*; on peut appeler le nombre* γ *ou* β *la limite supérieure du système* (α_ν)*.*»

La démonstration de ce théorème est fort simple: soit $\alpha_{\varkappa_2}$ dans la série (α_ν) le premier nombre plus grand que α_1, $\alpha_{\varkappa_3}$ le premier plus grand que $\alpha_{\varkappa_2}$, etc.

On a alors:

$$1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4 < \ldots\ldots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{\varkappa_2} < \alpha_{\varkappa_3} < \alpha_{\varkappa_4} < \ldots\ldots$$

et $\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda}$, dès que $\nu < \varkappa_\lambda$.

Il peut se faire maintenant que, à partir d'un certain nombre $\alpha_{\varkappa_\rho}$ tous les nombres qui le suivent dans la série (α_ν) soient plus petits que lui; ce nombre est alors évidemment le plus grand de tous et nous avons: $\gamma = \alpha_{\varkappa_\rho}$. Sinon, qu'on imagine le système de tous les nombres entiers plus petits que α_1, à partir de 1, qu'on ajoute immédiatement à ce système celui de tous les nombres entiers $\geqq \alpha_1$ et $< \alpha_{\varkappa_2}$, puis celui de tous les nombres $\geqq \alpha_{\varkappa_2}$ et $< \alpha_{\varkappa_3}$, et ainsi de suite; on obtiendra alors une portion déterminée de nombres successifs de nos deux premières classes de nombres; ce système de nombres est évidemment de la première puissance et par conséquent il existe (d'après la définition de (II)) un nombre déterminé β de l'ensemble (II), qui est immédiatement plus grand que ces nombres. On a donc $\beta > \alpha_{\varkappa_\lambda}$ et par conséquent aussi: $\beta > \alpha_\nu$ parce qu'on peut toujours prendre $\varkappa_\lambda$ assez grand pour dépasser un ν donné et qu'alors $\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda}$.

On voit d'autre part que tout nombre $\beta' < \beta$ est inférieur en grandeur à certains nombres $\alpha_{\varkappa_\nu}$; et ainsi se trouvent démontrées toutes les parties du théorème.

De là résulte que *l'ensemble de tous les nombres de la deuxième classe de nombres (II) n'a pas la même puissance que (I);* car autrement nous pourrions concevoir tout l'ensemble (II) sous la forme d'une série simple:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots\ \alpha_\nu,\ \ldots\ldots$$

qui aurait, d'après le théorème que nous venons de démontrer, un membre maximum γ ou dont tous les membres α_ν seraient inférieurs en grandeurs à un certain nombre β de (II); dans le premier cas le nombre $\gamma + 1$ qui appartient à la classe (II), dans le second cas le nombre β bien qu'appartenant à la classe (II), ne se trouveraient pas dans la série (α_ν), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de l'identité des systèmes (II) et (α_ν); par conséquent la classe de nombres (II) a une *autre puissance que la classe de nombres (I).*

Quant au fait, que la seconde des deux puissances des classes de nombres (I) et (II) suit immédiatement la première, c. à d. qu'entre les deux puissances il n'y en a pas d'autre; c'est une conséquence d'un théorème que je vais formuler et démontrer immédiatement.

Cependant, jetons d'abord un regard en arrière et rappelons-nous les moyens par lesquels nous sommes arrivés soit au développement de la notion de nombre entier réel, soit à une nouvelle puissance de systèmes bien définis, distincte de la première; il y avait *trois moments logiques* importants et qu'il faut bien distinguer l'un de l'autre. Ce sont les *deux principes de formation* définis plus haut, et *un principe d'arrêt ou de limitation* qui s'ajoute aux premiers et qui consiste en *ce qu'on ne peut entreprendre, à l'aide d'un des deux autres principes, la formation d'un nouveau nombre entier qu'à une condition nécessaire: c'est que l'ensemble de tous les nombres précédents ait la même puissance qu'une classe de nombres dont on a déjà défini toute l'étendue.* Par cette méthode, en observant ces trois principes, *on peut arriver toujours à de nouvelles classes de nombres et, avec elles, à toutes les puissances diverses, successivement croissantes que l'on rencontre dans la nature matérielle ou immatérielle;* les nouveaux nombres ainsi obtenus ont alors toujours la même précision concrète et la même réalité objective que les précédents; je ne sais donc pas, en vérité, ce qui pourrait nous empêcher de nous servir de ce moyen de formation de nouveaux nombres, quand on voit que, pour le progrès des sciences, il est indispensable d'introduire une nouvelle classe de nombres.

§ 13.

J'arrive maintenant, pour tenir ma promesse, à démontrer que les puissances de (I) et de (II) se suivent immédiatement, en sorte qu'il n'y en a *pas d'autre entre ces deux.*

Si, d'après une loi quelconque, on choisit dans l'ensemble (II) un système (α') de divers nombres α', c. à d. si on conçoit un système quelconque (α') contenu dans (II), ce système aura toujours des propriétés que l'on peut exprimer par les théorèmes suivants:

»*Parmi les nombres du système (α') il y en a toujours un plus petit que tous les autres.*»

»*Etant donné, en particulier, une suite de nombres de l'ensemble (II): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_\beta, \ldots\ldots$ dont la grandeur va toujours en décroissant (en sorte que $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$, si $\beta' > \beta$), cette série doit finir nécessairement, avec un nombre fini de membres et se termine par le plus petit des nombres; la série ne peut pas être infinie.*»

Il est remarquable que ce théorème, qui est d'une évidence immédiate quand les nombres α_β sont des nombres entiers finis, peut aussi se démontrer dans le cas de nombres infinis α_β. En fait, d'après le théorème précédent que l'on déduit facilement de *la définition de la série de nombres (II)*, parmi les nombres α_ν, à ne considérer que ceux où l'indice ν est fini, il y en a un plus petit que tous les autres; soit ce nombre $= \alpha_\rho$, il est évident, qu'à cause de $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, la série α_ν et par conséquent aussi toute la série α_β doit être composée précisément de ρ membres, et par suite sera une série finie.

On arrive maintenant au théorème fondamental suivant:

»*(α') étant un système de nombres quelconque contenu dans l'ensemble (II), il ne peut se présenter que les trois cas suivants: ou bien (α') est un ensemble fini, c. à d. composé d'une quantité finie de nombres, ou bien (α') a la puissance de la première classe (I) ou enfin (α') a la puissance de la classe (II); il n'y a pas d'autre cas possible.*»

On peut simplement démontrer ce théorème de la manière suivante: soit Ω le premier nombre de la *troisième* classe de nombres (III): tous les nombres α' du système (α') sont alors plus petits que Ω parce que cette série est contenue dans (II).

Nous nous représentons maintenant les nombres α' *ordonnés d'après leur grandeur:* soit α_ω le plus petit de ces nombres, $\alpha_{\omega+1}$ *le nombre immédiatement supérieur, etc., on a la série (α') sous forme d'une série »bien ordonnée» α_β, où β parcourt les nombres de notre série naturelle de nombres développée, à partir de ω;* évidemment β reste inférieur ou égal à α_β et comme $\alpha_\beta < \Omega$, on a aussi $\beta < \Omega$. Le nombre β ne peut donc pas sortir de la classe de nombres (II), mais il reste dans les limites de cette classe; il ne peut donc se présenter que trois cas: ou bien β reste au-dessous d'un nombre assignable de la série $\omega + \nu$, alors (α') est un système fini; ou bien β prend toutes les valeurs de la série $\omega + \nu$, mais reste au-dessous d'un nombre *assignable* de la série (II), et alors (α') est évidemment un système de la première puissance; ou enfin β prend des valeurs aussi grandes qu'on voudra dans (II), alors β parcourt *tous les nombres de (II)*; dans ce dernier cas l'ensemble (α_β) c. à d. le système (α') a *évidemment la même puissance que (II)*.

c. q. f. d.

Comme conséquence immédiate du théorème que nous venons de démontrer, on a les suivants:

»*Etant donné un système quelconque bien défini M de la puissance de la classe de nombres (II), si on prend dans M un système partiel infini quelconque M', on peut concevoir l'ensemble M' sous forme d'une série simplement infinie, ou bien on peut faire correspondre réciproquement les deux systèmes M' et M à sens unique.*»

»*Etant donné un système bien défini quelconque M de la deuxième puissance, un système partiel M' pris dans M, et un système partiel M'' pris dans M', si on sait que le dernier système M'' peut être rapporté d'une manière réciproque, et à sens unique, au premier M, on peut toujours aussi faire correspondre le deuxième M', d'une manière réciproque et à sens unique, au premier, et par conséquent aussi au troisième.*»

J'énonce ici ce *dernier* théorème, à cause du rapport qu'il a avec ceux qui précèdent, en supposant que M a la *puissance de (II)*; évidemment il est encore vrai quand M a la *puissance de (I)*; mais ce qui me paraît très-*remarquable* et ce que je signale ici expressement, c'est que ce théorème est vrai d'une manière générale, quelle que soit la puissance du système M. J'y reviendrai plus au long dans un autre travail, et je ferai voir alors l'intérêt particulier qui se rattache à ce théorème général.

§ 2.

Un avantage considérable des nouveaux nombres consiste pour moi dans une notion nouvelle, qui ne s'était pas encore presentée jusqu'ici, celle *du nombre des éléments d'un ensemble infini bien ordonné*; comme cette notion est toujours exprimée par un nombre complètement déterminé de l'ensemble de nombres que nous avons développé, pourvu seulement que *l'ordre des éléments du sustème, tel que nous le définirons tout à l'heure, soit déterminé,* et comme d'autre part la notion de nombre d'éléments a une représentation objective immédiate, ce rapport entre le nombre des éléments d'un ensemble et le nombre démontre la *réalité* de ce dernier même dans les cas où il est infini et en même temps déterminé.

Par ensemble ou système bien ordonné il faut entendre tout système bien défini, où les éléments sont unis entre eux par une succession donnée et déterminée, d'après laquelle il y a *un premier élément* du système; chaque élément (pourvu qu'il ne soit pas le dernier dans la succession) est suivi immédiatement d'un autre déterminé, et à chaque système arbitraire d'éléments, fini ou infini appartient un élément *déterminé,* qui les suit *immédiatement* dans la succession (pourvu que dans l'ensemble il y a des éléments qui suivent tous les éléments du système partiel considéré). Pour éclaircir soit donné un ensemble (α_ν) de la première puissance; on peut en former de différentes manières des *ensembles bien ordonnés,* par ex. les suivants:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots)$$

$$(\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1)$$

$$(\alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$(\alpha_1, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-2}, \alpha_{2\nu}, \ldots\ldots)$$

etc. etc.

Deux »systèmes bien ordonnés» sont dits avoir *le même nombre* (par rapport aux successions auxquelles ils ont donné lieu), quand on peut établir entre eux *une correspondance réciproque à sens unique telle,* que, E et F étant deux éléments quelconques de l'un, E_1 et F_1 les éléments correspondants de l'autre, la position de E et F dans la succession du premier système s'accorde toujours avec la position de E_1 et F_1 dans la succession de la deuxième série, en sorte que, si E précède F dans la succession de la première série, E_1 précède aussi F_1 dans la succession de la deuxième série. Cette correspondance, si elle est possible, comme il est facile de le voir, est toujours *complètement déterminée,* et comme dans la série des nombres développée il y a toujours un nombre α, et un seul, tel que ceux qui le précèdent (à partir de 1) aient dans la succession naturelle le même nombre, on est obligé d'égaler directement à α le nombre de ces deux systèmes »bien ordonnés», quand α est un nombre infiniment grand, et de l'égaler à $\alpha - 1$, qui précède immédiatement α, quand α est un nombre entier fini. Par exemple les trois ensembles bien ordonnés:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots)$$

$$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu}, \alpha_{2\nu-1}, \ldots\ldots)$$

$$(1, 2, 3, \ldots\ldots, \nu, \ldots\ldots)$$

ayant le même nombre, celui-ci se trouve d'après notre définition égal à ω.

De même les nombres des ensembles bien ordonnés:

$$(\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1)$$

$$(\alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$(\alpha_1, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-2}, \alpha_{2\nu}, \ldots\ldots)$$

se trouvent, d'après notre définition, être respectivement égals à $\omega + 1$, $\omega + 2$, 2ω.

La différence essentielle entre les systèmes finis et infinis, c'est qu'un système fini offre le même nombre d'éléments dans toutes les successions que l'on peut leur donner; au contraire un système composé d'un nombre infini d'éléments aura en général divers nombres, d'après la succession que l'on donnera à ses éléments. *La puissance d'un système est, comme nous l'avons vu, un attribut indépendant de l'ordre de ce système; mais le nombre du système nous apparaît comme un facteur dépendant, en général, d'une succession donnée des éléments, dès qu'on a à faire avec des systèmes infinis.* Cependant même dans les systèmes infinis *il y a encore un certain rapport* entre la *puissance* du système et le *nombre* de ses éléments, par rapport à une succession donnée.

Prenons d'abord un système ayant la puissance de la *première classe* et donnons aux éléments une succession déterminée quelconque, de manière à obtenir un système »bien ordonné», le nombre de ce système est toujours un nombre déterminé de la *deuxième* classe de nombres et ne peut jamais être déterminé par un nombre d'une autre classe que de la deuxième. D'autre part on peut disposer tout système de la première puissance dans un ordre de succession tel que le nombre de ce système, par rapport à cette succession, soit égal à un nombre de la deuxième classe, désigné d'avance arbitrairement. Nous pouvons encore exprimer ces théorèmes comme il suit: *tout système de la puissance de première puissance peut être dénombré par des nombres de la deuxième classe de nombres et par ces nombres seuls, et on peut toujours donner aux éléments du système un ordre de succession tel que le système lui-même dans cette succession est dénombré par un nombre de la deuxième classe de nombres donné à volonté, nombre qui exprime le nombre des éléments du système par rapport à cette succession.*

Les règles analogues s'appliquent aux systèmes de puissances plus élevées. *Ainsi tout système bien défini de la deuxième puissance peut être dénombré par des nombres de la troisième classe de nombres, et par ces nombres seuls, et on peut toujours donner aux éléments du système un ordre de succession tel, que le système lui-même dans cette succession est dénombré* (1) *par un nombre de la troisième classe de nombres donné à volonté, nombre qui détermine le nombre des éléments du système par rapport à cette succession.*

§ 3.

La notion du système bien ordonné nous apparaît comme fondamental pour toute la théorie des ensembles. Je reviendrai dans un autre travail sur cette loi fondamentale, ce me semble, très-importante par ses conséquences et remarquable surtout par sa généralité: *on peut toujours mettre tout système bien défini sous la forme d'un système bien ordonné.* Je me borne ici à démontrer comment, de la notion du système bien ordonné, on arrive de la manière la plus simple aux opérations fondamentales pour les nombres entiers, finis ou infinis déterminés, et comment les lois

(1) D'après la définition que nous venons de donner, ce que nous avons appelé, dans les premiers numéros de notre travail, systèmes dénombrables ne sont que des systèmes dénombrables *par* des nombres de la première classe (systèmes finis) ou *par* des nombres de la deuxième classe (systèmes de la première puissance).

de ces opérations se déduisent, avec une certitude évidente, de la considération intrinsèque immédiate. Soient d'abord deux systèmes bien ordonnés M et M_1, auxquels correspondent comme nombres les nombres α et β, $M + M_1$ sera un nouveau système bien ordonné; il y a donc aussi un nombre déterminé qui correspond comme nombre au système $M + M_1$ par rapport à l'ordre de succession que l'on obtient entre ses éléments; ce nombre s'appelle la somme de α et β et se désigne par $\alpha + \beta$; on voit immédiatement que, si α et β ne sont pas finis l'un et l'autre, $\alpha + \beta$ sera en général différent de $\beta + \alpha$. *La loi de commutation cesse donc d'être vraie d'une manière générale pour l'addition.* Et maintenant on arrive si simplement à la notion de la somme de plusieurs nombres donnés dans une suite déterminée, qui peut être elle-même une suite infinie déterminée, que je n'insisterai pas davantage sur ce point; je me contente donc de remarquer que la loi d'association se trouve généralement vraie. On a en particulier:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Si on prend une succession, déterminée par un nombre β, de systèmes tous égaux et également ordonnés, dans chacun desquels le nombre des éléments est égal à α, on obtient un nouveau système bien ordonné dont le nombre donne la définition du produit $\beta\alpha$, où β est le multiplicateur, α le multiplicande; ici encore il se trouve que $\beta\alpha$ diffère généralement de $\alpha\beta$, et par conséquent *la loi de commutation n'est pas vraie non plus d'une manière générale pour la multiplication des nombres.* Par contre la loi d'association s'applique aussi à la multiplication d'une manière générale, en sorte qu'on a: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Parmi les nouveaux nombres, quelques-uns se distinguent des autres par la propriété de nombres premiers; cependant il faut caractériser cette propriété d'une manière un peu plus déterminée, en entendant par nombre premier un nombre α, pour lequel la décomposition $\alpha = \beta\gamma$, où β est multiplicateur, n'est possible que si $\beta = 1$ ou $\beta = \alpha$; par contre le multiplicande aura généralement aussi pour les nombres premiers α un certain champ d'indétermination, ce qui, d'après la nature des choses, ne peut pas se modifier. Néanmoins nous montrerons dans un autre travail que la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers peut toujours avoir lieu d'une manière essentiellement unique et déterminée même au point de vue de la suite des facteurs (tant que ces facteurs ne sont pas des nombres premiers finis se présentant à côté l'un de l'autre dans le produit). On obtient par là deux espèces de nombres premiers infinis déterminés, dont la première se rapproche des nombres premiers finis, tandis que les nombres premiers de la deuxième espèce ont un tout autre caractère.

Maintenant, à l'aide de ces nouvelles données, j'espère de donner bientôt une preuve rigoureuse du théorème relatif à ce que nous avons appelé les ensembles linéaires infinis, qui se trouve prononcé à la fin de notre travail: »Une contribution à la théorie des ensembles» (Journal de BORCHARDT, t. 84, p. 257).

Dans le dernier numéro (4) du présent travail (t. XXI, p. 54), j'ai obtenu relativement aux systèmes de points P, qui sont contenus dans un ensemble continu à n dimensions, un théorème que l'on peut énoncer comme il suit, en employant les nouvelles expressions définies plus haut:

»*P étant un système de points, dont le dérivé $P^{(\alpha)}$ s'annule d'une manière identique, où α est un nombre entier pris à volonté dans la première ou la seconde classe, le premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ et par conséquent aussi P lui-même est un système de points de la première puissance.*»

Ce théorème peut se retourner de la manière suivante:

»*P étant un système de points dont le premier dérivé $P^{(1)}$ a la première puissance, il y a des nombres entiers α, appartenant à la première ou à la deuxième classe de nombres, pour lesquels $P^{(\alpha)}$ s'annule d'une manière identique, et parmi les nombres α qui offrent cette particularité, il y en a un plus petit que tous les autres.*»

Je publierai très-prochainement la démonstration de ce théorème. M. MITTAG-LEFFLER publiera ensuite un travail où il montrera comment en se fondant sur ce théorème on peut généraliser d'une manière remarquable le résultat de ses recherches et de celles de M. le Prof. WEIERSTRASS sur l'existence de fonctions analytiques à sens unique avec des positions singulières données.

§ 14.

Je vais maintenant considérer les nombres de la deuxième classe (II) et les opérations qu'on peut effectuer sur ces nombres, en me bornant à l'essentiel, et en réservant à plus tard des recherches plus profondes sur ce sujet.

J'ai défini d'une manière générale dans le § 3 les opérations de l'addition et de la multiplication et j'ai montré que pour les nombres entiers infinis, elles ne sont pas soumises en général à la loi de commutation, mais bien à la loi d'association; cela est donc vrai aussi en particulier pour les nombres de la deuxième classe de nombres. Quant à la loi de distribution, elle est vraie sous la forme suivante:

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(où $\alpha+\beta$, α, β paraissent comme multiplicateurs), comme on peut s'en convaincre immédiatement par la considération intrinsèque.

La soustraction peut être considérée à deux points de vue. Soient α et β deux nombres entiers quelconques, $\alpha<\beta$, on se convainc sans peine que l'équation: $\alpha+\xi=\beta$ admet toujours une solution et une seule, par rapport à ξ; si α et β sont des nombres de (II), ξ sera un nombre de (I) ou (II). Posons ce nombre ξ égal à $\beta-\alpha$.

Si au contraire on considère l'équation suivante:

$$\xi+\alpha=\beta$$

on voit que souvent elle n'est pas résoluble d'après ξ; ce cas, par exemple, se présente pour l'équation:

$$\xi+\omega=\omega+1.$$

Mais même dans les cas où l'équation: $\xi+\alpha=\beta$ peut être résolue d'après ξ, il se trouve souvent qu'on peut y satisfaire par une quantité infinie de valeurs numériques de ξ; mais parmi ces solutions diverses il y en aura toujours une plus petite que toutes les autres.

Pour désigner cette plus petite racine de l'équation

$$\xi+\alpha=\beta,$$

quand elle est résoluble, choisissons le signe $\beta_{-\alpha}$ qui par conséquent diffère généralement de $\beta - \alpha$.

Si on a ensuite entre trois nombres β, α, γ, l'équation:

$$\beta = \gamma\alpha,$$

(où γ est multiplicateur), on se convainc sans peine que l'équation:

$$\beta = \xi\alpha$$

n'a pas d'autre solution, d'après ξ, que $\xi = \gamma$ et dans ce cas on désigne γ par $\frac{\beta}{\alpha}$.

On trouve au contraire que l'équation:

$$\beta = \alpha\xi$$

(où ξ est multiplicande), si elle est résoluble d'après ξ, a généralement plusieurs racines et en a même un nombre infini; mais il y en a toujours une plus petite que toutes les autres; cette racine minima satisfaisant à l'équation: $\beta = \alpha\xi$, quand cette équation est résoluble, peut se désigner par:

$$\frac{\underline{\beta}}{\alpha}.$$

Les nombres α de la deuxième classe de nombres sont de deux espèces: 1° les α précédés immédiatement dans la série par un autre nombre qui est alors α_{-1}; je les appelle nombres de la première espèce; 2° les α qui ne sont pas précédés immédiatement, dans la série, par un autre membre, pour lesquels par conséquent il n'y a pas de α_{-1}, et que j'appelle de la deuxième espèce. Les nombres ω, 2ω, $\omega^{\nu} + \omega$, ω^{ω} sont par exemple de la deuxième espèce, au contraire $\omega + 1$, $\omega^2 + \omega + 2$, $\omega^{\omega} + 3$ sont de la première.

De même les nombres premiers de la deuxième classe de nombres, que j'ai définis d'une manière générale au § 3, se divisent aussi en nombres de la deuxième et en nombres de la première espèce.

Les nombres premiers de la deuxième espèce sont, suivant l'ordre où ils se présentent dans la classe de nombres (II):

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^2},\ \omega^{\omega^3},\ \ldots..,$$

en sorte que parmi tous les nombres de la forme:

$$\varphi = \nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

il n'y a qu'un nombre premier, savoir ω, de la deuxième espèce; mais qu'on ne conclue pas, de cette rareté relative des nombres premiers de la deuxième espèce, que l'ensemble de tous ces nombres a une puissance moindre que la classe de nombres (II) elle-même; il se trouve que cet ensemble a la même puissance que (II).

Les nombres premiers de la première espèce sont tout d'abord:

$$\omega + 1,\ \omega^2 + 1,\ \ldots\ldots,\ \omega^\mu + 1,\ \ldots\ldots$$

Ce sont les seuls nombres premiers de la première espèce que l'on rencontre parmi les nombres que nous venons de désigner par φ; l'ensemble de tous les nombres premiers de la première espèce dans (II) a aussi la puissance de (II).

Les nombres premiers de la deuxième espèce ont une propriété qui leur donne un caractère tout à fait à part; soit η un de ces nombres premiers (de la deuxième espèce), on a toujours $\eta\alpha = \eta$, si α est un nombre quelconque plus petit que η; de là résulte que, si α et β sont deux nombres quelconques, tous deux plus petits que η, le produit $\alpha\beta$ est toujours aussi plus petit que η.

En nous bornant d'abord ici aux nombres de la deuxième classe, qui ont la forme φ, nous trouvons pour ces nombres les règles d'addition et de multiplication qui suivent.

Soit:

$$\varphi = \nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_\mu$$

$$\psi = \rho_0 \omega^\lambda + \rho_1 \omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda,$$

où nous supposons ν_0 et ρ_0 autres que zéro.

Addition.

1° Soit $\mu < \lambda$, on a:

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2° Soit $\mu > \lambda$, on a:

$$\varphi + \psi = \nu_0\omega^\mu + \ldots\ldots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \\ + \rho_2\omega^{\lambda-2} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

3° Pour $\mu = \lambda$ on a:

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \rho_0)\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

Multiplication.

1° Si ν_μ est autre que zéro, on a:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_\mu\rho_0\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

Si $\lambda = 0$, le dernier membre à droite est: $\nu_\mu\rho_0$.

2° Si $\nu_\mu = 0$, on a:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^\lambda.$$

La décomposition d'un nombre φ en ses facteurs premiers se fait comme il suit.

Soit:

$$\varphi = c_0\omega^\mu + c_1\omega^{\mu_1} + c_2\omega^{\mu_2} + \ldots\ldots + c_\sigma\omega^{\mu_\sigma}$$

où $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \ldots\ldots > \mu_\sigma$ et $c_0, c_1, \ldots\ldots c_\sigma$ sont des nombres finis positifs autres que zéro, on a:

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)c_2 \ldots\ldots c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)c_\sigma\omega^{\mu_\sigma};$$

si on se représente encore $c_0, c_1, \ldots\ldots c_{\sigma-1}c_\sigma$ décomposés en facteurs premiers d'après les règles de la première classe de nombres, on a alors la décomposition de φ en facteurs premiers; car les facteurs $\omega^x + 1$ et ω sont eux-mêmes, comme on l'a remarqué plus haut, des nombres premiers. Cette décomposition de nombres de la forme φ en nombres premiers est déterminée, même en égard à la suite de série des facteurs, en faisant abstraction de la commutabilité des facteurs premiers dans les facteurs c et s'il est entendu que le dernier facteur doit être une puissance de ω ou égal à un et que ω ne peut être facteur qu'à la dernière place. Je reviendrai dans une autre circonstance sur la généralisation de cette décomposition en facteurs premiers, pour des nombres α pris à volonté dans la deuxième classe de nombres (II).

§ 10.

La notion du »continu» n'a pas seulement joué un rôle important dans le développement des sciences en général, elle a encore provoqué de grands partages d'opinion et, par suite, de vives discussions. Cela vient peut-être de ce que l'idée prise pour point de départ a été absolument différente chez les divers auteurs, parce qu'ils n'avaient pas la définition exacte et complète de la notion; mais peut-être aussi, et c'est ce qui me paraît le plus vraisemblable, les Grecs qui ont cherché les premiers à se rendre compte de cette idée du continu, ne l'ont pas conçue aussi claire et aussi complète qu'il aurait fallu pour empêcher les âges suivants de se partager comme il l'ont fait. Ainsi nous voyons que LEUCIPPE, DÉMOCRITE et ARISTOTE considèrent le continu comme un composé de parties divisibles à l'infini, tandis qu'EPICURE et LUCRÈCE en font un composé de leurs atomes finis; de là, ensuite, une grande discussion entre les philosophes, les uns suivant ARISTOTE, les autres EPICURE; d'autres enfin, pour rester en dehors de cette discussion, établirent, avec S. THOMAS d'AQUIN, que le continu n'est pas composé d'un nombre fini ou infini de parties, mais qu'il n'a pas de parties du tout; cette dernière opinion me semble moins une explication que l'aveu tacite qu'on n'est pas arrivé au fond de la question et qu'il vaut mieux la laisser de côté. Nous trouvons ici l'origine de cette idée scolastique du moyen-âge, qui a encore aujourd'hui ses partisans, et d'après laquelle le continu est une idée indécomposable, ou, pour parler avec d'autres auteurs, une pure intuition a priori dont on peut à peine donner une notion déterminée; on regarde comme une tentative sans fondement et on rejette en conséquence tout essai de détermination de ce mystère par l'arithmétique.

Je suis bien loin de vouloir évoquer encore une fois ces discussions, et la place me manquerait dans le cadre étroit de mon travail pour les traiter d'une manière exacte; je me vois seulement obligé de développer ici, d'une manière aussi brève que possible et seulement au point de vue de la théorie mathématique des systèmes, cette notion du continu. Mais ce travail ne m'a pas été facile, parce que, parmi les mathématiciens dont j'invoque volontiers l'autorité, aucun ne s'est occupé du continu dans le sens où j'ai à le faire ici.

En prenant pour point de départ une ou plusieurs grandeurs réelles ou complexes continues (ou, pour parler, je crois, plus exactement, des systèmes continus de grandeurs), on s'est formé du mieux qu'on a pu la notion d'un continu dépendant, avec un seul ou plusieurs sens, de ces grandeurs, c'est à dire qu'on est arrivé à la notion de fonction continue et ainsi s'est formée la théorie de ce qu'on a appelé les fonctions analytiques, comme aussi des fonctions plus générales avec leurs phénomènes les plus remarquables (comme l'impossibilité de la différentiation et d'autres semblables); mais le continu indépendant lui-même n'a été proposé par les mathématiciens que sous la forme la plus simple et n'a pas été l'objet de considérations plus profondes.

Je dois déclarer tout d'abord qu'à mon avis l'introduction de la notion de temps ou de l'idée de temps ne doit pas servir à expliquer la notion beaucoup plus primitive et plus générale du continu; le temps, à mon avis, est une idée qui suppose, pour être expliquée clairement, la notion de continuité, indépendante de celle du temps, et qui, même avec cette notion de continuité ne peut être conçue ni objectivement comme une substance, ni subjectivement comme une idée nécessaire a priori; cette idée de temps n'est qu'une idée auxiliaire et relative, servant à établir le rapport entre les divers mouvements qui ont lieu dans la nature et que nous percevons. Ainsi jamais il ne se présente dans la nature rien qui ressemble au temps objectif ou absolu et par conséquent on ne peut pas prendre le temps comme mesure du mouvement, mais au contraire on pourrait considérer le mouvement comme mesure du temps, si on n'en était empêché parce qu'on n'a rien gagné à considérer le temps comme une idée subjective nécessaire a priori.

Je suis de même convaincu qu'on ne peut pas commencer par l'idée intuitive de l'espace, pour arriver à des conclusions sur le continu, parce que l'espace et les figures qu'on y conçoit ne peuvent arriver qu'à l'aide d'un continu déjà formé d'une manière abstraite à devenir l'objet non plus seulement de considérations purement esthétiques, de spéculations philosophiques subtiles ou d'essais faits au hasard, mais de recherches mathématiques positives.

Il ne me reste donc plus qu'à chercher, au moyen des notions de nombres réels définis dans § 9, une idée purement arithmétique, et aussi générale que possible, d'un continu de points. Je prends nécessairement pour point de départ l'espace arithmétique plan à n dimensions G_n, c. à d. l'ensemble de tous les systèmes de valeurs:

$$(x_1 \mid x_2 \mid \ldots\ldots \mid x_n),$$

où chaque x peut avoir indépendamment des autres toutes les valeurs numériques réelles de $-\infty$ à $+\infty$. J'appellerai tout système de valeurs de ce genre un point arithmétique de G_n. La distance de deux de ces points est définie par l'expression:

$$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots\ldots + (x'_n - x_n)^2}$$

et par un système de points arithmétiques P contenu dans G_n on entend tout ensemble donné de points de l'espace G_n. *L'examen aboutit donc à donner une définition exacte et aussi générale que possible, quand on peut appeler l'ensemble P un continu.*

J'ai démontré dans le Journal de Borchardt, t. 84, p. 242, que tous les espaces G_n, si grand que soit le nombre de dimensions n, ont la même puissance entre eux et par suite la même puissance que le continu linéaire, et la même que l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle $(0 \ldots\ldots 1)$. La recherche et la fixation de la puissance de G_n se ramène donc à la même question, spécialisée à l'intervalle $(0 \ldots\ldots 1)$, et j'espère pouvoir bientôt y répondre en démontrant rigoureusement que la puissance cherchée n'est autre que celle de notre deuxième classe de nombres (II). De là résultera que tous les systèmes de points infinis P ont soit la puissance de la première classe de nombres (I) soit celle de la seconde (II). On pourra encore en tirer cette autre conséquence que l'ensemble de toutes les fonctions d'une ou de plusieurs variables pouvant être représentées sous forme de série donnée-infinie quelconque, n'a de même que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) et par conséquent peut être dénombré par des nombres de la troisième classe de nombres (III). Ce théorème se rapportera donc par exemple à l'ensemble de toutes les fonctions »analytiques» d'une ou de plusieurs variables, ou au système de toutes les fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles que l'on peut représenter par des séries trigonométriques.

Pour arriver maintenant à la notion générale d'un continu donné dans G_n, je rappelle la notion de l'ensemble dérivé $P^{(1)}$ d'un ensemble de points P donné à volonté, telle qu'elle a été développée dans le mémoire (Ann. Math. t. V, puis t. XV, XVII, XX et XXI); elle conduit à la notion d'un dérivé $P^{(\gamma)}$, où γ peut être un nombre entier quelconque d'une des classes de nombres (I), (II), (III), etc.

On peut maintenant partager aussi les systèmes de points P en deux classes d'après la puissance de leur premier dérivé $P^{(1)}$. Si $P^{(1)}$ a la puissance de (I), on voit, comme je l'ai déjà dit dans le § 3 de ce mémoire, qu'il y a un premier nombre entier α de la première ou de la deuxième classe de nombres (II), pour lequel $P^{(\alpha)}$ disparaît. Mais si $P^{(1)}$ n'a pas la première puissance, on peut toujours, et d'une seule manière, décomposer $P^{(1)}$ en deux systèmes R et S, en sorte que: $P^{(1)} = R + S$, où R et S sont de nature bien différente:

R est de la première puissance et dans des conditions telles qu'il y a toujours un premier nombre entier γ des classes de nombres (I) ou (II), pour lequel:

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) = 0. \text{ (}^1\text{)}$$

S au contraire est dans des conditions telles que l'emploi du procédé de dérivation n'y change absolument rien, en sorte que:

$$S \equiv S^{(1)}$$

et par conséquent aussi:

$$S \equiv S^{(\gamma)};$$

j'appelle ces systèmes S *ensembles parfaits de points.* Nous pouvons donc

---

([1]) Ce caractère général des ensembles R a été remarqué et démontré par M. Bendixson.

dire: *quand $P^{(1)}$ n'a pas la première puissance, $P^{(1)}$ se divise à sens unique en un ensemble parfait S et un ensemble R de la première puissance.*

Les systèmes de points parfaits S ne sont pas toujours ce que nous avons appelé *condensé dans toute l'étendue;* c'est pourquoi ils ne se prêtent pas encore à la définition complète d'un continu de points, quand même on est obligé d'accorder immédiatement que le continu doit être toujours un système parfait.

Au contraire il faut encore une notion pour la joindre à celle qui précède et définir le continu: c'est la notion d'un système de points T *bien enchaîné.*

Nous disons que T est un système de points bien enchaîné, quand pour deux points quelconques t et t' de ce système, avec un nombre donné ε aussi petit qu'on voudra, il y a toujours un nombre fini de points $t_1, t_2, \ldots\ldots t_\nu$ de T, de plusieurs manières, en sorte que les distances $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \ldots\ldots \overline{t_\nu t'}$ soient toutes plus petites que ε.

Tous les continus de points géométriques que nous connaissons sont aussi compris, comme il est facile de le voir, sous cette notion du système de points bien enchaîné; mais je crois maintenant reconnaître aussi dans ces deux attributs »parfait» et »bien enchaîné» les caractères nécessaires et suffisants d'un continu de points et je définis par conséquent un continu de points dans G_n *un système parfaitement enchaîné. Ici »parfait» et »bien enchaîné» ne sont pas seulement des mots, mais des attributs du continu tout à fait généraux, caractérisés d'une manière abstraite, de la façon la plus précise, par les définitions précédentes.*

La définition que donne Bolzano du continu (Paradoxes, § 38) n'est certainement pas exacte; elle n'exprime qu'une seule propriété du continu, qui se trouve réalisée dans les ensembles obtenues en concevant comme éloignées de G_n un système de points »*isolé*» quelconque (cf. Ann. math. t. XXI, p. 51); elle se trouve de même réalisée dans des systèmes composés de plusieurs continus séparés; évidemment dans ces cas il n'y a pas de continu, comme le ferait croire la définition de Bolzano: nous trouvons donc ici une faute contre le principe: on dit qu'une chose fait partie de l'essence d'une autre, quand l'une ne peut exister sans l'autre et que la présence de l'une entraîne celle de l'autre, ou que l'une ne peut ni exister ni se concevoir sans l'autre, et vice versa.

Notes.

L'ensemble de toutes les fonctions continues, et même de toutes les fonctions, susceptibles d'être intégrées, d'une ou de plusieurs variables, ne pourrait avoir, comme il me semble, que la puissance de la deuxième classe de nombres (II); cependant si on laisse de côté toutes les restrictions et qu'on considère l'ensemble de toutes les fonctions continues et discontinues d'une ou de plusieurs variables, ce système aura la puissance de la troisième classe de nombres (III).

On peut démontrer pour les systèmes parfaits ce théorème: ils n'ont jamais la puissance de (I).

Comme exemple d'un système de points parfait, qui n'est pas condensé dans toute l'étendu d'un intervalle si petit qu'il soit, j'indique l'ensemble de tous les nombres réels contenus dans la formule:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots\cdots$$

où les coefficients c_ν peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2 et où la série peut être composée d'un nombre fini ou infini de membres.

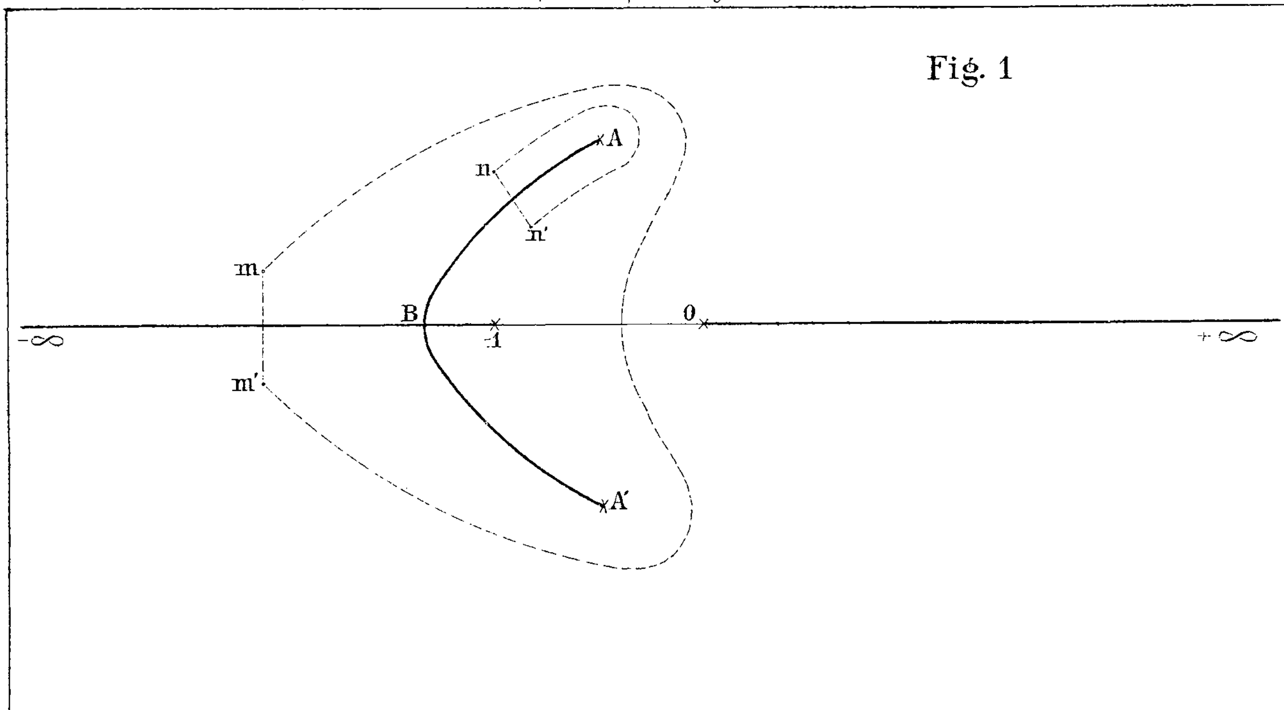
Il faut remarquer que la définition d'un continu donnée en haut est indépendante de toute considération sur ce qu'on appelle la dimension d'une figure continue; la définition en effet embrasse aussi les continus composés de parties bien enchaînées de différente dimension, comme des lignes, des surfaces, des solides, etc. Je sais bien que le mot »continu» n'a pas pris jusqu'à présent, dans les mathématiques, un sens bien arrêté; la définition que j'en donne sera donc trop étroite pour les uns, trop large pour les autres; j'espère avoir réussi à trouver le juste milieu.

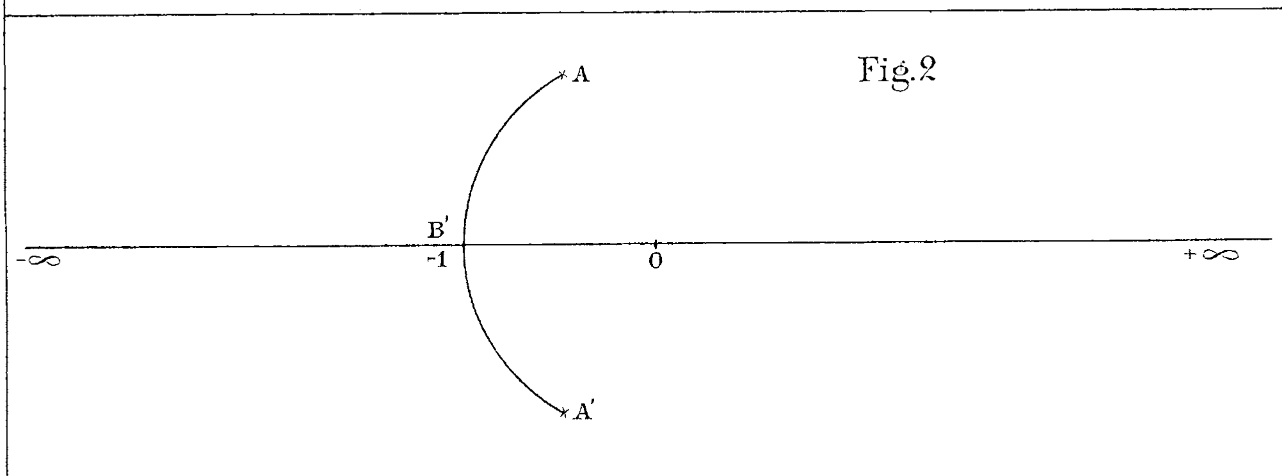
D'après ma manière de concevoir les choses on ne peut entendre par continu qu'un ensemble parfait et bien enchaîné. D'après cela une étendue droite par exemple, à laquelle manque un des points-extrêmes, ou tous les deux, une surface circulaire sans limite ne sont pas des continus parfaits; j'appelle ces systèmes de points des semi-continus.

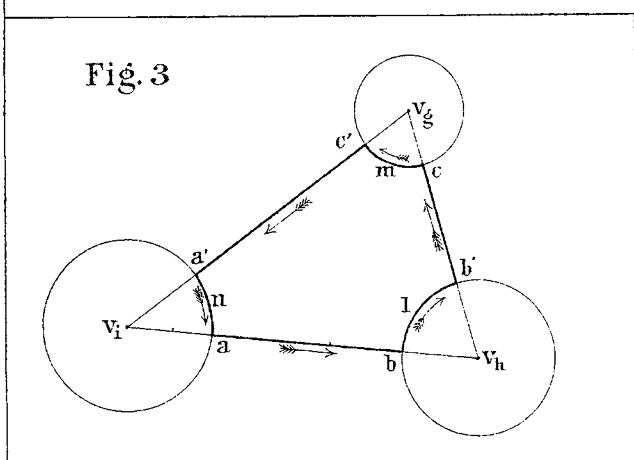
En général j'entends par semi-continu un système de points imparfait, bien enchaîné, appartenant à la seconde classe et constitué de telle sorte que deux quelconques de ses points peuvent être réunis par un continu parfait, qui est un élément constitutif du système de points. Tel est, p. ex., l'espace que j'ai désigné par A (Ann. math., t. XX, p. 119) et qui a été obtenu en éloignant de G_n un système de points quelconque de la première puissance.

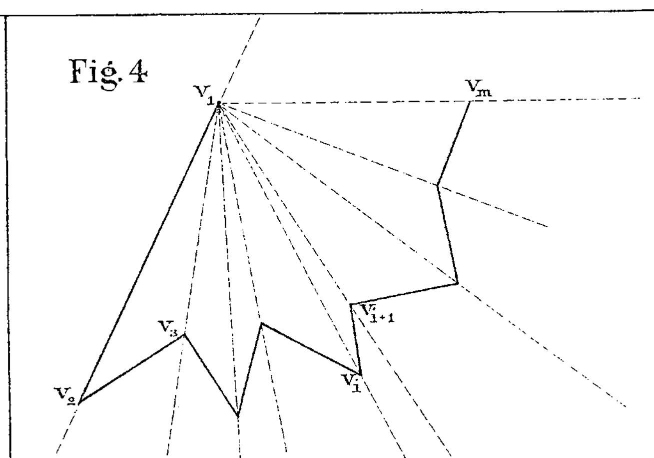
Le dérivé d'un système de points bien enchaîné est toujours un continu, que le système de points bien enchaîné ait la première ou la deuxième puissance.

Si un système de points bien enchaîné est de la première puissance, je ne puis l'appeler ni un continu ni un semi-continu.









Centr.-Tryck. Stockh. D.252.

Fig. 5

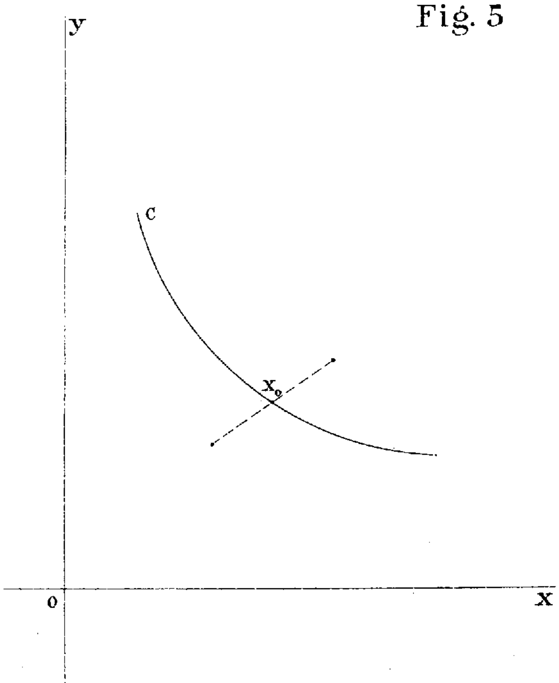


Fig. 6

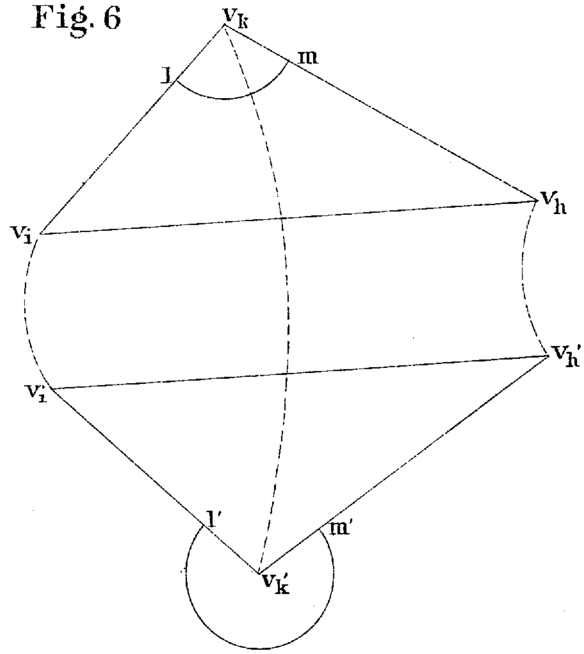


Fig. 7

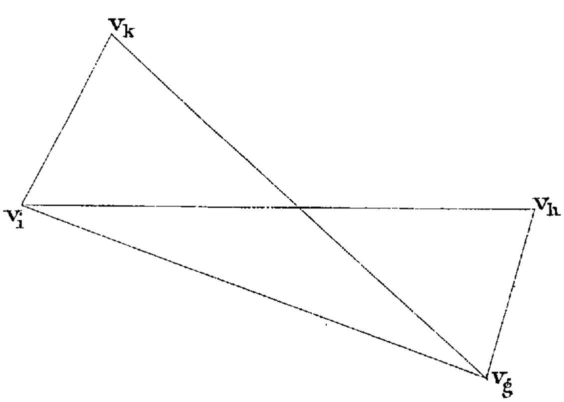
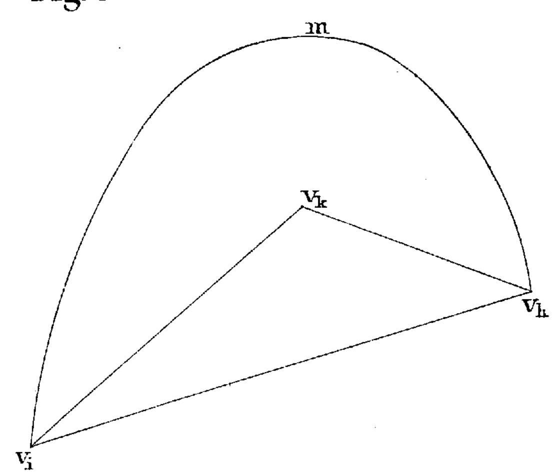


Fig. 8



Centr.-Tryck. Stockh. 1882.

Fig. 9

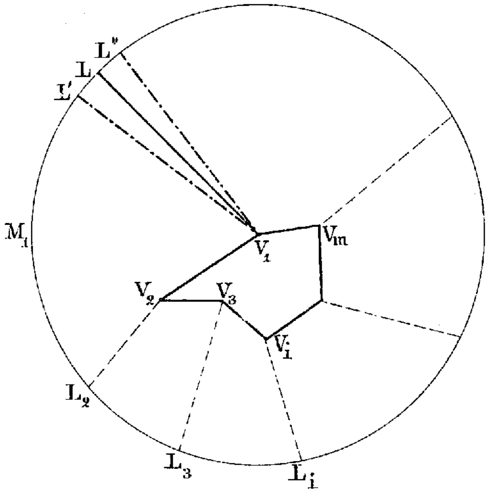
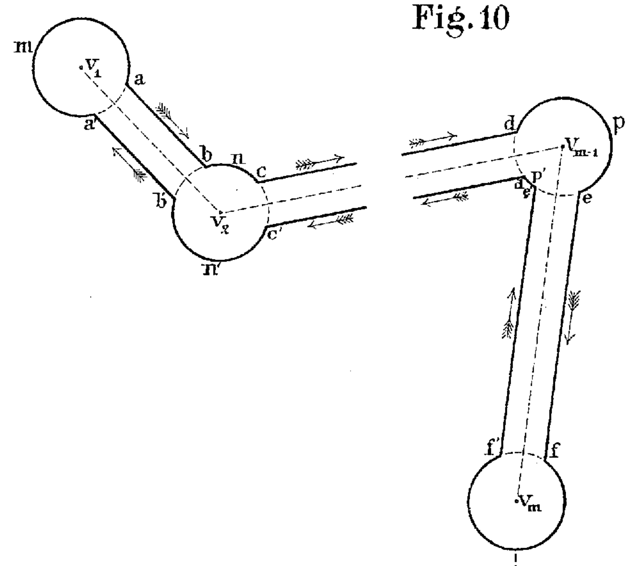


Fig. 10



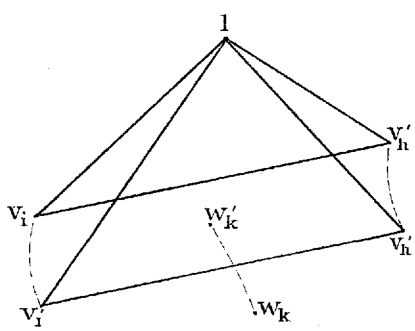
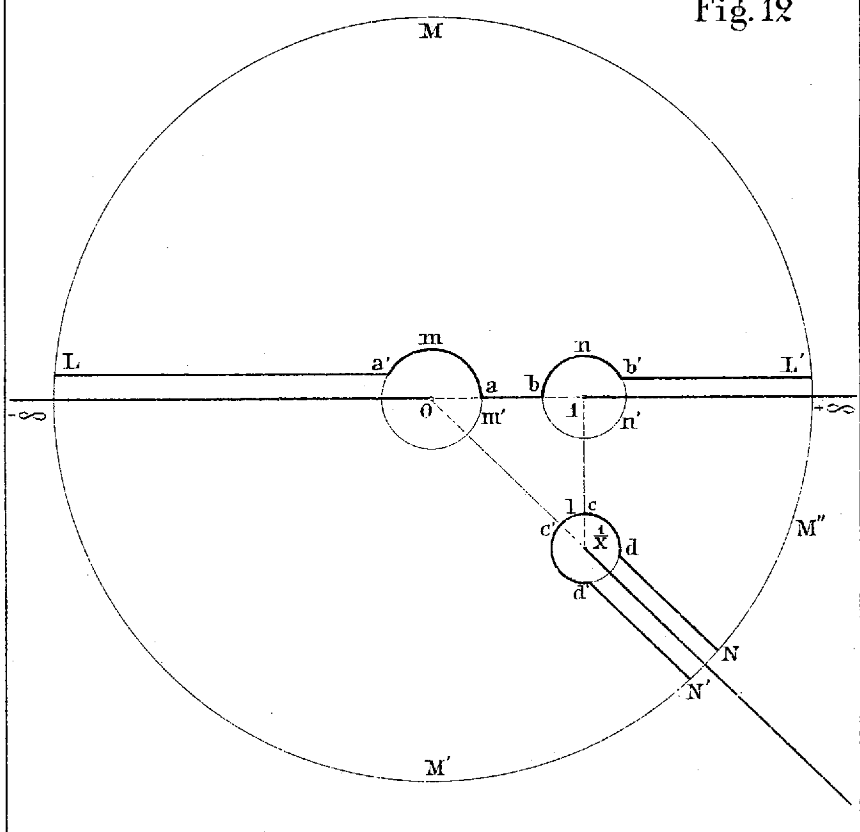


Fig. 11

Fig. 12



Centr.-Tryck. Stockh. B 252.

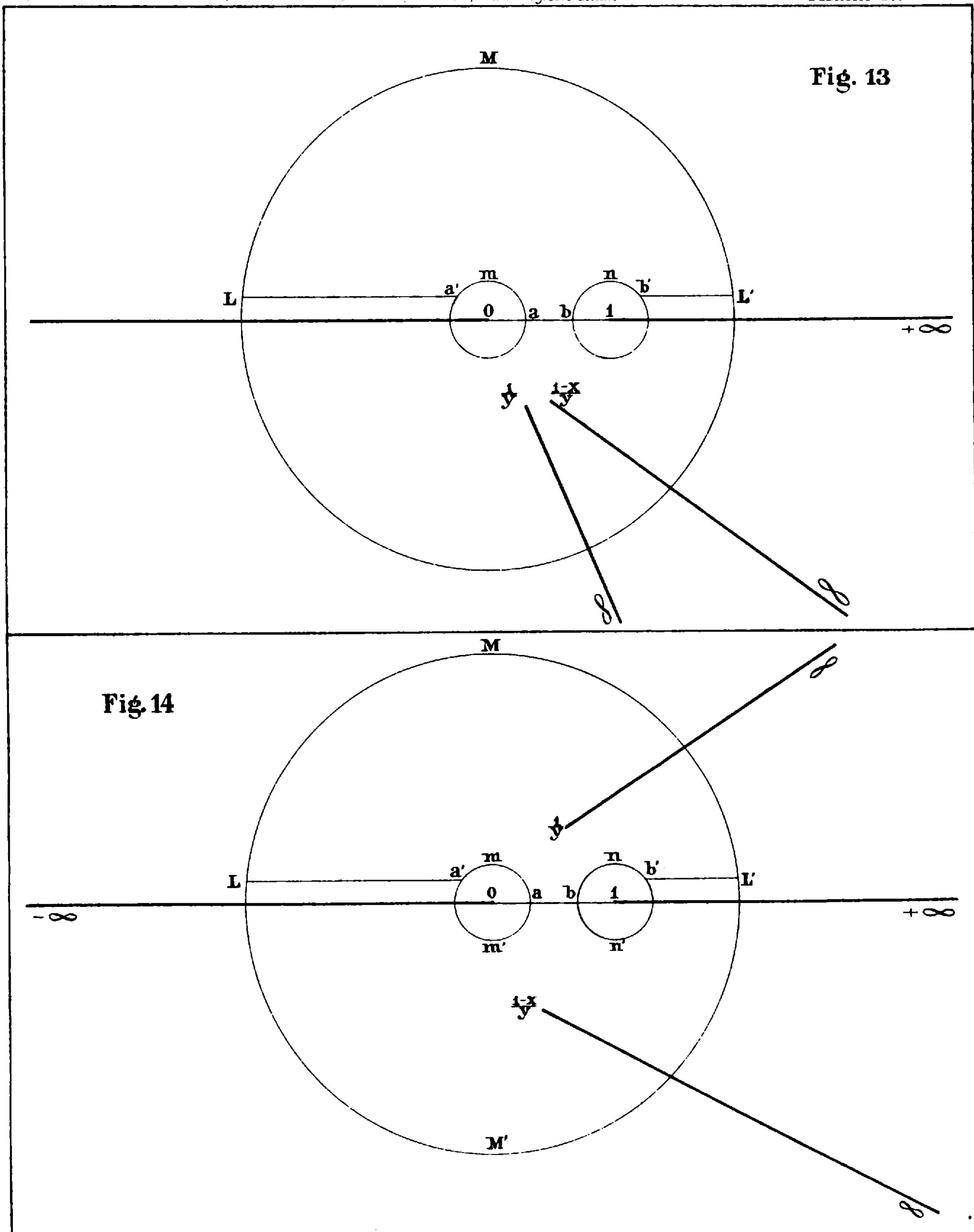


Fig. 13
M
L
a'
m
0
a
b
n
1
b'
L'
+∞
1
y
1-x
y
∞
∞
∞
Fig. 14
M
1
y
L
a'
m
0
a
b
n
1
b'
L'
-∞
+∞
m'
n'
1-x
y
M'
∞