Les Ehrenfest viennent en aide à Boltzmann

Cet article a pour but de souligner l'intérêt des résultats sur les chaînes de Markov dans le contexte de la cinétique des gaz. Les notions seront abordées progressivement dans un souci d'apporter un maximum d'intuition tout en évitant un excès de formalisme.

L'étude que je propose repose sur la question inhabituelle suivante : vous êtes en train de cuisiner et vous mettez au four la tarte que vous venez de préparer. Un moment d'inattention et quelques événements imprévus... vous oubliez votre préparation. Le drame se produit ! Déjà, trop tard ! votre œuvre est carbonisée et votre logement est enfumé. Comme vous le faites habituellement, vous vous précipitez et vous ouvrez toutes les fenêtres. En pensant bien faire, vous vous dites : « pour aérer, il suffit que je laisse mes fenêtres ouvertes le plus longtemps possible. » Est-ce une erreur ? Prenez-vous le risque que la fumée revienne en laissant vos fenêtres ouvertes trop longtemps ?

Dans cet article nous allons essayer de répondre à cette question. Pour y parvenir, nous essayerons d'analyser avec un maximum d'intuition les phénomènes liés au temps d'attente.

La plupart des notions abordées pourront être réutilisées dans l'introduction des probabilités au collège, au lycée et faire l'objet de sujets détaillés dans l'enseignement supérieur. Ce thème pourrait également faire l'objet d'une approche pluridisciplinaire. La dernière partie propose une activité pour le collège, un sujet détaillé niveau lycée et un sujet niveau supérieur reprenant pas à pas la démonstration d'un des principaux théorèmes.

Mots-clefs. Probabilités, Chaîne de Markov, Cinétique des gaz.

Niveau. Collège, Lycée, Supérieur

L. Boltzmann et P. Ehrenfest

A. Utilisation en classe et liens

Cet article a pour objectif de découvrir des phénomènes liés au temps d'attente. Pour cela nous allons effleurer sans approfondir des théories qui pourraient faire l'objet d'un ou plusieurs articles ou livres. Pour éviter une quelconque frustration du lecteur je vous propose des liens vers des documents qui vous permettront de répondre à la plupart de vos attentes. Je vous suggère également de suivre les liens pour découvrir des animations utilisables en classe qui permettent de mettre en évidence la beauté des phénomènes étudiés.

Les animations. Cette liste n'est pas exhaustive et n'est qu'indicative.
- Une animation Geogebra.
- Ressources pour la spécialité Mathématique sur le site d'Eduscol.
- Une simulation d'un modèle de cinétique des gaz.

Pour compléter ce texte, je vous propose de visionner une vidéo de Laure Saint-Raymond, professeure à l'École Normale Supérieure. Elle n'est pas nécessaire pour la lecture et la compréhension de ce document et peut paraître éloignée du sujet étudié. Elle a principalement l'avantage de proposer de manière élégante les problèmes liés à la cinétique des gaz et de souligner l'aspect historique des phénomènes abordés. Une belle preuve une fois de plus que les mathématiques sont bel et bien vivantes !

Rencontre autour des mathématiques : l'irréversibilité, une histoire de probabilités

B. Attendre pour estimer une probabilité

1. Introduction

L'approche usuelle, suggérée par les programmes officiels, permettant de définir la probabilité d'un événement repose sur l'approche fréquentiste. Ce point de vue basé sur la fameuse « loi des grands nombres » ne laisse pas à première vue beaucoup de latitude quand à la définition de la probabilité de la réalisation d'un événement.

Nous pourrions, en poussant le vice, penser que la probabilité d'un événement est définie de manière non ambiguë et impose par nature une unique approche. Nous pouvons lire dans de nombreux manuels la phrase « déterminer la probabilité de... » sans pour autant en définir le sens. Comme si la probabilité considérée était implicitement celle à laquelle nous pensons tous. Mais à quoi pensons-nous ? ou même : en quoi croyons-nous ?

Nous pourrions envisager une approche différente dite « bayésienne » basée sur la croyance [1]. Voilà un bien grand mot !

1. Voir [Hen], une lecture très instructive sur les approches possibles.

Un exemple simple pour s'en convaincre. Nous sommes amis, je vous propose de jouer avec moi à Pile ou Face en suivant les règles suivantes : si la pièce tombe sur Pile vous me donnez 1 euro et dans le cas contraire je vous donne 1 euro.

Confiant, vous allez jouer en pensant implicitement que cette pièce est équilibrée. Nous pourrions introduire dans ce cas la notion de croyance a priori ou de probabilité de réalisation a priori. Mais rien ne permet de croire que cette pièce est équilibrée... comment s'en convaincre ?

Il suffit de se ramener à l'approche fréquentiste et lancer la pièce un nombre de fois suffisant. Comment allez vous réagir ? Au bout de 10 lancers, la liste des résultats va vous permettre de reviser votre croyance et d'aborder le jeu sous un autre angle. Nous abordons ici la notion de probabilité conditionnelle et de probabilité a posteriori.

Nous procédons de la sorte dans la plupart des situations rencontrées (par exemple : revision des croyances suite à la publication d'une analyse statistique sur les thèmes comme les maladies, les accidents de la route, économie, etc.)

Cette approche souligne la difficulté de proposer une unique approche concernant la définition d'une probabilité. Ce constat est probablement à l'origine de l'engouement pour le formalisme et l'axiomatique de Kolmogorov de la part des mathématiciens pour définir la notion de probabilité.

Cet article n'a pas pour but de revenir sur cette belle théorie, mais d'en extraire sur un exemple une interprétation en terme de « temps d'attente » de la notion de probabilité.

2. Un exemple fondamental

Cette approche repose sur un exemple simple : nous jouons à une machine à sous avec l'espoir non dissimulé d'obtenir un triple 7. Comment évaluer la probabilité de ce triple 7 pour connaître notre espérance de gain ?

Nous pourrions proposer une approche fréquentiste et dire que chaque rouleau peut proposer 10 symboles et par conséquent nous aurions une probabilité de réalisation de $\frac{1}{10^3}$. À l'aide de ce résultat, combien de parties à 1 euro sommes nous prêts à effectuer pour espérer gagner ?

À l'aide de l'analyse précédente nous sommes prêts à répondre 10^3 parties. Nous constatons que le calcul de la probabilité n'est pas directement lié au temps d'attente nécessaire pour l'obtention du triple 7. Pourrions-nous proposer une approche plus adaptée ?

Pour faire un lien direct avec l'effort financier à effectuer nous pourrions considérer que la probabilité d'obtenir un triple 7 est **inversement proportionnelle au temps d'attente pour l'obtenir**. Est-ce que nous obtenons le même résultat ?

Nous proposons pour cela la modélisation suivante : nous considérons une suite d'expériences indépendantes et nous notons X la variable aléatoire associée au temps d'attente du premier succès. Nous introduisons l'événement succès : l'événement « triple 7 » de probabilité $p = \frac{1}{10^3}$.
La variable X suit une loi géométrique [2] de paramètre p.
En particulier son espérance est égale à $\frac{1}{p} = 10^3$.

Si X suit une loi géométrique de paramètre p alors $E[X] = \frac{1}{p}$.

2. Pour une utilisation en 1re S de la loi géométrique tronquée consultez [PrL]. Une approche détaillée pourra se trouver dans n'importe quel cours de CPGE accessible en ligne.

Nous pouvons traduire ce résultat de la manière suivante :

> Si A est un événement et T la variable aléatoire associée au temps d'attente de la première réalisation de A alors la probabilité de A est $P(A) = \dfrac{1}{E[T]}$.

Nous proposons ainsi une nouvelle approche qui va s'avérer simple et efficace.

C. Vers les chaînes de Markov

1. Introduction

1.1. Généralités

Même si l'exemple précédent révèle l'importance de cette approche il est nécessaire dans un premier temps de généraliser le contexte pour espérer capter le plus grand nombres de phénomènes physiques, économiques, etc.

Le contexte retenu. Nous considérons un récipient (ce choix n'est pas anodin !) supposé à un état initial noté e_0 (par exemple : vide). Nous offrons la possibilité à ce récipient de changer d'état au cours du temps et nous notons $\{e_0, \cdots, e_N\}$ (avec $N \in \mathbb{N}^*$) l'ensemble des états possibles.

Nous imposons une probabilité de transition en notant, pour tout i, j dans $[\![0, N]\!]$, $a_{i,j}$ la probabilité que le récipient passe de l'état i à l'état j. Nous remarquons en particulier que cette transition ne dépend pas de l'étape à laquelle nous nous trouvons et donc du temps.

Afin de proposer une représentation précise nous noterons Y_n le vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ dont la k-ième coordonnée est la probabilité que le récipient soit dans l'état k à l'instant $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, Y_0 est donné par la matrice ligne $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 , & 0 , & \cdots & , 0 \end{pmatrix}$.

Comment « lier » Y_{n+1} et Y_n ? En fixant n un entier naturel correspondant à un instant, la description du modèle nous impose de reviser nos croyances sur l'état du récipient à l'instant $n+1$. En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_n^0 , & y_n^1 , & y_n^2 , & \dots & , y_n^N \end{pmatrix},$$

la formule des probabilités totales [3] nous donne [4]

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_{n+1}^0 & = & a_{0,0}y_n^0 + a_{1,0}y_n^2 + \cdots + a_{N,0}y_n^N \\ y_{n+1}^1 & = & a_{0,1}y_n^0 + a_{1,1}y_n^2 + \cdots + a_{N,1}y_n^N \\ & \vdots & \\ y_{n+1}^N & = & a_{0,N}y_n^0 + a_{2,N}y_n^2 + \cdots + a_{N,N}y_n^N. \end{array}\right.$$

En notant A la matrice carrée de taille $N+1$ définie par $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![0,N]\!]}$ nous obtenons directement l'égalité : pour tout n entier naturel,

$$Y_{n+1} = Y_n A.$$

La matrice A sera appelée « matrice de transition » du processus ou de la chaîne de Markov. Ce qui nous mène à

3. C'est une réécriture de la formule des probabilités conditionnelles, que que nous retrouvons dans [PrC].
4. $a_{i,j}$ est la probabilité que le récipient soit dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant qu'il était dans l'état i à l'instant n.

Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus associé à la matrice de transition A, alors, pour tout n entier naturel, $Y_n = Y_0 A^n$.

Nous pouvons en particulier remarquer que l'analyse du phénomène probabiliste nous dirige vers l'étude d'un système dynamique. Cette description contient une idée importante que nous résumerons par le schéma suivant.

Un processus probabiliste $\Rightarrow$ un système dynamique.

Les questions que nous suggérons sont les suivantes :

– Existe-t-il une situation d'équilibre ?
– Est-ce que le récipient revient un jour à l'état initial ?
– En combien de temps ?

1.2. Les urnes d'Ehrenfest : premier contact

Nous considérons deux urnes U_1 et U_2 séparées par une membrane poreuse qui permettent à des particules de passer d'une urne à l'autre. Nous considérons à l'origine que l'urne U_1 contient $N \in \mathbb{N}^*$ particules. Celles-ci se déplacent au cours du temps d'une urne à l'autre en respectant le procédé suivant :

À chaque instant, nous choisissons de manière équiprobable une particule et nous la transférons dans l'urne qui ne la contenait pas.

Nous nous intéressons à l'état de l'urne U_1 au cours du temps. Nous considérerons Y_n le vecteur de taille $N+1$ donné par

$$Y_n = \left(\ y_n^0\ ,\ y_n^1\ ,\ y_n^2\ ,\ \cdots\ , y_n^N\ \right)$$

tel que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$,

y_n^k est la probabilité que l'urne U_1 contienne k particules à l'étape n.

Il nous suffit de déterminer les transitions : soit $i \in [\![1, N-1]\!]$; si l'urne U_1 contient i particules à l'étape n l'étape d'après l'urne U_1 contient $i-1$ ou $i+1$ particules. Plus précisément, l'urne U_1 passe de i à $i-1$ particules en transférant une particule dans l'urne U_2 avec probabilité

$$\frac{i}{N}\text{(nombre de particules dans } U_1 \text{ à l'étape } n \text{ sur le nombre total de particules).}$$

De même l'urne U_1 passe de i à $i+1$ particules en transférant une particule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 avec probabilité $\dfrac{N-i}{N} = 1 - \dfrac{i}{N}$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, N]\!], & p_{i,i-1} = \dfrac{i}{N} \\ \forall i \in [\![0, N-1]\!], & p_{i,i+1} = 1 - \dfrac{i}{N}. \end{cases}$$

Ce qui donne la matrice de transition de taille $N+1$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & 1-\frac{1}{N} & & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{i}{N} & 0 & 1-\frac{i}{N} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1-\frac{1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour 3 particules la matrice de transition est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons pour tout entier naturel n, $Y_n = Y_0 A^n$.

Les questions deviennent

> Existe-t-il une situation d'équilibre ? Est-ce l'équilibre thermodynamique attendu ? Est-ce que les particules reviennent toutes à un instant dans l'urne U_1 ?

Pour plus de clarté, nous pouvons traduire la deuxième question par :

> Votre logement est enfumé. Vous ouvrez les fenêtres pour laisser s'échapper la fumée. Est-ce que vous prenez le risque que la fumée revienne en laissant vos fenêtres ouvertes ?

2. Formalisation du problème

Nous notons, pour tout entier naturel n, X_n la variable associée à l'état du récipient au temps n.

> $P(X_n = k)$ est la probabilité que l'urne U_1 contienne k particules à l'étape n.

Le lien avec la partie précédente se fait à l'aide de l'écriture

$$Y_n = (P(X_n = 0),\ \cdots, P(X_n = N)).$$

Nous précisons qu'il ne s'agit pas là d'une volonté de complexifier l'exposé mais bien au contraire de proposer une approche basée sur l'interprétation des états successifs du récipient parfaitement représentés par la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le vocabulaire associé est le suivant :

> La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition A.

Nous pouvons traduire les questions précédentes de la manière suivante :

1. Est-ce qu'il existe une configuration d'équilibre ? Autrement dit, peut-on trouver $\pi = (\pi_0, \cdots, \pi_N) \in (\mathbb{R}^+)^{N+1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$ et $\pi A = \pi$.
   Ce qui se traduit par : si nous choisissons l'état initial du récipient à l'aide d'un tirage au sort tel que la probabilité d'être dans l'état k est π_k alors à l'instant suivant la probabilité que le récipient soit à l'état k est π_k.
2. Est-ce qu'il y a convergence vers cette situation d'équilibre ?
   Sous réserve d'existence de la distribution π, est-ce que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$,
   $$P(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi_k \ ?$$
   Variante [5] : sous réserve d'existence de la distribution π, est-ce que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, la fréquence moyenne de passage à l'état k converge vers π_k ?
   En notant $\mathbb{1}_{X_i=k}$ la variable aléatoire de Bernoulli associée à l'événement succès $[X_i = k]$ la fréquence de passage à l'état k sur les n premières étapes s'écrit $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_i=k}$ et la question devient ainsi :
   $$E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_i=k}\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(X_i = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{?} \pi_k.$$
3. Sous les conditions précédentes, comment interpréter cette distribution limite ? Quel est le lien entre le temps d'attente du premier retour à l'état k et la valeur π_k ?

3. Une hypothèse sur les transitions

Avant d'envisager une approche « théorique » et de proposer les résultats associés à notre problématique, nous allons revenir sur les conditions que nous aimerions imposer à la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ & p_{i,j} & \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}.$$

$$\uparrow$$

probabilité de passer de i à j en une étape

Nous obtenons par itération que pour tout entier n,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \\ & p_{i,j,n} & \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}.$$

$$\uparrow$$

probabilité de passer de i à j en n étapes

5. Dans cette question, plus faible, la convergence est remplacée par la convergence *en moyenne*, aussi appelée convergence *au sens de Césaro* ou *de la moyenne ergodique*.

Nous allons imposer à notre modèle que

> **tous les états communiquent :**
> Pour tout $i, j \in [\![0, N]\!]$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j,n} > 0$.

Cette condition sera vérifée pour le modèle des urnes d'Ehrenfest.

Dans ce cas, nous conviendrons du vocabulaire suivant.

> La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition P est dite irréductible.

Nous remarquons en effet que la chaîne de Markov des urnes d'Ehrenfest est bien irréductible. Pour passer de l'état k à un état i il suffit de rajouter ou d'enlever $k - i$ particules (en $|k - i|$ étapes) à l'urne U_1. Les états communiquent donc tous.

D. Un peu de théorie

1. Existence et unicité d'une loi limite

> **Théorème 1 : existence et unicité d'une situation d'équilibre.**
> Soit A une matrice de transition associée à une chaîne de Markov irréductible.
> – L'ensemble des vecteurs π tels que $\pi = \pi A$ est un espace vectoriel de dimension 1.
> – Il existe un unique $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_N)$ tel que
>   – Pour tout entier naturel $i \in [\![0, N]\!]$, $\pi_i > 0$.
>   – $\sum\limits_{i=0}^{n} \pi_i = 1$.
>   – $\pi = \pi A$.

L'unique distribution π est appelée **distribution stationnaire** associée à A.

> **Théorème 2 : un comportement limite.**
> Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible de distribution stationnaire π. Nous avons le comportement asymptotique suivant.
>
> Pour tout état $k \in [\![0, N]\!]$, la fréquence moyenne de passage à l'état k converge vers π_k, ce que nous pouvons traduire par
>
> $$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_i=k}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P(X_i = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi_k.$$

Un très beau résultat à ne pas s'y tromper.[6] Que contient-il ?

6. Pour plus de précisions, je vous propose une lecture complète et détaillée : [Vel, chapitre 9].

1. **Le mode de convergence ?**
   Avant d'approfondir cette question, une précision sur la convergence obtenue s'impose : peut-on espérer la convergence de la suite $(P(X_n = i))_{n\in\mathbb{N}}$ vers π_i ?
   Prenons l'exemple des urnes d'Ehrenfest dans le cas très particulier d'une seule particule $N = 1$. Dans ce cas, le phénomène proposé est clairement déterministe. Nous souhaitons souligner qu'une hypothèse supplémentaire est nécessaire même dans un cas aussi simple.
   En considérant que l'urne U_1 contient la particule à l'origine nous obtenons que pour tout entier naturel n
   $$P(X_{2n} = 1) = 1 \text{ et } P(X_{2n+1} = 1) = 0.$$
   La suite $(P(X_n = 1))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas converger !
   Quel est le problème ? la possibilité d'une « périodicité ».
   Nous ne perdons pas la convergence des fréquences : dans ce cas
   $$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_i=1}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P(X_i = 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$
   Les fréquences que nous pouvons interpréter comme des barycentres permettent d'absorber les phénomènes de périodicité.
   Pour espérer une convergence des $(P(X_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ vers π_k nous devons donc rajouter une hypothèse.
   Une condition suffisante d'absence de « périodicité » ?
   Comme nous venons de le constater la condition d'irréductibilité de la chaîne n'est pas suffisante. Ainsi, il ne suffit pas que « tous les états communiquent » [7] pour éviter l'aspect périodique. Nous pourrions par exemple contrôler le temps de « communication » en supposant que :
   « tous les états communiquent en n_0 étapes ».
   Ce qui impose en particulier que lorsque les n_0 étapes se sont écoulées, tous les états peuvent se produire à chaque instant avec probabilité strictement positive. Ce qui évite ainsi tout phénomène de périodicité.
   Nous dirons que la chaîne de Markov est **apériodique** lorsque [8]

Il existe un entier naturel $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i, j \in [\![0, N]\!]$, $p_{i,j,n_0} > 0$.

   Nous obtenons ainsi

   Théorème 2 bis : un comportement limite.
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible **apériodique** de distribution stationnaire π. Alors, pour tout entier $k \in [\![0, N]\!]$,
   $$P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi_k.$$

   Je propose au lecteur de consulter le cours [Vel] pour des définitions claires et précises.
   Les preuves des résultats précédents [9] sont proposées sous forme d'un sujet détaillé à la fin de l'article.
2. **Où est la distribution initiale ?**
   Le résultat le plus remarquable qui est masqué dans l'énoncé précédent est lié à la condition initiale

7. **traduction :** pour tout $i, j \in [\![0, N]\!]$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j,n} > 0$.
8. Il ne s'agit pas de la définition « classique » de « l'apériodicité ». Le lemme 9.6 page 154 du cours [Vel] permet de se convaincre de l'équivalence des définitions. Avec les notations du « sujet pour le supérieur » (en annexe), notre définition se traduit par « une puissance de la matrice de transition A est dans S_n^* ».
9. Uniquement du théorème 2 bis.

– La convergence ne dépend pas de la loi de X_0 ou du vecteur $(P(X_0 = 0), \cdots, P(X_0 = N))$.
– La limite ne dépend pas de la loi de X_0.
Ce que nous pouvons traduire par : quelle que soit la distribution initiale, la distribution finale sera la même.

3. **Une première interprétation de la distribution stationnaire ?**
L'approche fréquentiste est de retour... Ce résultat corrobore l'approche usuelle en termes de fréquences que nous proposons pour la définition de la probabilité d'un événement. Nous serions donc tenté d'affirmer que
π_k **est la probabilité de l'événement « le récipient est dans l'état** k **».**
Cette définition nous semble naturelle et classique. En revanche, une interprétation en lien avec la dynamique d'évolution proposée dans la formalisation ne semble pas évidente. Comme nous l'avons effectué pour l'expérience du « triple 7 », pourrions nous proposer une approche adaptée ?

4. Il manque deux « détails » pour compléter le tableau :
– Comment interpréter la distribution π en termes de temps d'attente ?
– Comment expliciter la distribution π ?

2. La distribution stationnaire

2.1. Comment la trouver ?

L'un des résultats directement issu de l'analyse précédente est [10] :

Corollaire : réversibilité.
Soit A une matrice associée à une chaîne de Markov irréductible. Si π est un vecteur de coordonnées positives vérifiant

$$\forall i, j \in [\![0, N]\!], \pi_i a_{i,j} = \pi_j a_{j,i},$$

alors π est la distribution stationnaire de A.

Concernant les urnes d'Ehrenfest, quelle est cette distribution ? Nous pouvons évidemment procéder intuitivement, quelle serait cette distribution d'équilibre ?

Pour chacune des N particules, afin de respecter le rôle symétrique des urnes, nous proposons de choisir l'urne dans laquelle nous allons la placer en lançant une pièce équilibrée. Sur Pile la particule sera positionnée initialement dans U_1 et sur Face dans U_2.

Pour π_k, nous proposons que π_k soit la probabilité que l'urne U_1 contienne k particules parmi N. Nous opterions ainsi pour que la distribution stationnaire soit une distribution binomiale de paramètre $\left(N, \dfrac{1}{2}\right)$. Le facteur $\dfrac{1}{2}$ correspond à l'équiprobabilité de choisir l'urne dans laquelle nous mettrons la particule. Nous envisageons ainsi que pour tout entier $k \in [\![0, N]\!]$,

$$\pi_k = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}.$$

Il suffit de vérifier que cette distribution convient. Nous obtenons ainsi que

10. Le sens du « titre » du corollaire s'éclaircira à la lecture du cours [Vel]. Cela demande néanmoins d'appréhender le problème sous un angle plus technique.

Urne d'Ehrenfest 1.
La distribution stationnaire est donnée par : pour tout $k \in [\![0, N]\!]$,

$$\pi_k = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}.$$

Nous remarquons que lorsque $N = 1$ nous retrouvons $\pi_1 = \dfrac{1}{2}$.

2.2. Comment l'interpréter ?

Nous nous trouvons sur la question la plus sensible de l'article : comment interpréter ce résultat ?
L'approche à l'aide d'un temps d'attente va prendre tout son sens à la lecture du théorème suivant.

Théorème 3 : distribution stationnaire inversement proportionnelle au temps d'attente du premier retour.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible de distribution stationnaire π. Nous notons, pour tout entier $i \in [\![0, N]\!]$, T_i la variable aléatoire associée au temps d'attente du premier retour à l'état i. Nous avons alors les égalités

$$\text{pour tout entier } i \in [\![0, N]\!],\ \pi_i = \frac{1}{E[T_i]}.$$

Nous pouvons proposer comme dans l'introduction de cet article deux lectures de ce résultat.

1. La première consiste à obtenir une interprétation de cette probabilité limite et d'en déduire le comportement asymptotique des fréquences moyennes de passage en un état donné.
2. La deuxième consiste à renverser l'égalité obtenue et d'en déduire l'espérance du temps d'attente du premier retour.

L'espérance du premier retour à l'état k est donné par $E[T_k] = \dfrac{1}{\pi_k}$.

Nous obtenons en particulier le résultat pour les urnes d'Ehrenfest :

Urne d'Ehrenfest 2.
En considérant que l'urne U_1 contient initialement k particules sur un total de N, l'espérance du premier retour à l'état initial est de $\dfrac{2^N}{\binom{N}{k}}$.

E. Les Ehrenfest viennent en aide à Boltzmann

Sans rentrer dans les détails des résultats de thermodynamique et de cinétique des gaz nous pouvons considérer que les problématiques se placent à deux échelles :
- une échelle macroscopique : description des équilibres thermodynamiques.
- une échelle microscopique : description des dynamiques d'évolution des particules.

Sont-elles contradictoires ?

Les résultats fondamentaux de thermodynamique permettent d'affirmer que si l'on place toutes les particules d'un gaz dans une urne U_1 qui communique par une membrane poreuse avec une urne U_2 alors les particules vont progressivement se redistribuer dans les deux urnes jusqu'à atteindre une situation d'équilibre dans laquelle les deux urnes sont thermodynamiquement équivalentes.

Notre enfance scientifique a été bercée par les fameux principes de la thermodynamique [11] qui légitiment cette approche. Boltzmann [12] complète l'analyse en ajoutant que l'entropie du système est une fonction croissante du temps et qu'elle atteint son maximum à l'équilibre. [13] Avant de passer à l'aspect contradictoire, nous pouvons constater que la distribution stationnaire limite obtenue dans l'analyse précédente corrobore cette analyse. En effet,

> **Équilibre thermodynamique.**
> Nous rappelons que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $\pi_k = \dfrac{1}{2^N}\binom{N}{k}$. Le poids maximal sur la distribution stationnaire limite est atteinte pour la valeur $k = \dfrac{N}{2}$.
> L'équilibre thermodynamique est atteint lorsque les deux urnes contiennent $N/2$ particules.

Les urnes du couple Ehrenfest sont en adéquation avec ce constat thermodynamique.

Venons-en au problème. Ernst Zermelo [14] questionna Ludwig Bolzmann sur les contradictions que soulevait cette interprétation [15] Zermelo opposa à Bolzmann que son interprétation macroscopique n'était pas en accord avec les lois microscopiques sur la dynamique des particules. En effet, les particules et donc l'urne initialement vide étaient vouées à revenir à un instant donné à son état d'origine.

À la question posée :

> Votre logement est enfumé. Vous ouvrez les fenêtres pour laisser s'échaper la fumée.
> Est-ce que vous prenez le risque que la fumée revienne en laissant vos fenêtres ouvertes ?
> La réponse serait-elle OUI ?

Quelle fut la réponse de Boltzmann ? Il affirma qu'il était effectivement possible qu'un retour à l'état initial se produise mais que ce temps de retour serait trop long pour que nous puissions l'observer.

C'est en ce sens que le couple Ehrenfest [16] vient en aide à Boltzmann. Le modèle permet en effet de justifier techniquement la réponse de Boltzmann à Zermelo. Nous obtenons par exemple pour le cas de la fumée. En notant N le nombre de particules de fumée présentes dans

11. Non, cette phrase n'est pas provocante... Bon d'accord, elle l'est !
12. Physicien et philosophe autrichien (1844-1906), voir [Bio$_{\mathrm{LB}}$].
13. La vidéo de Laure Saint-Raymond proposée en introduction aborde la notion d'entropie et précise l'approche de Boltzmann.
14. Mathématicien allemand (1871-1953), voir [Bio$_{\mathrm{EZ}}$].
15. Voir [Bar] pour un récit historique des travaux de L. Bolztmann qui souligne l'importance de ce paradoxe.
16. Tatiana Afanassieva, mathématicienne russo-néerlandaise (1876-1964) et Paul Ehrenfest, physicien autrichien (1880-1933), voir [Bio$_{\mathrm{PE}}$].

votre logement en ouvrant les fenêtres la communication va s'effectuer avec l'extérieur jusqu'à l'équilibre thermodynamique auquel votre logement est aéré.

D'après l'étude précédente le temps de premier retour à l'état initial « logement enfumé » est égal à
$$E[T_0] = 2^N \text{ unités de temps.}$$

En considérant par exemple $N = 6 \times 10^{23}$ égal à la constante d'Avogadro qui est égal au nombre de molécules dans une mole de gaz, nous obtenons un temps d'attente gigantesque. Plus précisément nous obtenons ainsi en considérant une échelle de temps de 10^{-5} seconde que le temps de premier retour à l'état initial est approximativement égal à

$$E[T_0] = 2^{10^{23}} \text{ secondes.}$$

Sachant qu'une année contient environ 2^{25} secondes, nous obtenons un temps d'attente de l'ordre de
$$2^{10^{22}} \text{ années.}$$

Nous ne risquons donc rien... vous pouvez continuer à aérer.

Les résultats proposés ne permettent pas de répondre (en l'état) à une question du quotidien : combien de temps doit-on attendre pour considérer que notre pièce est aérée ?

La question devient donc : quelle est l'espérance du temps d'attente pour atteindre la situation d'équilibre thermodynamique ? Nous pourrions montrer que le temps moyen pour atteindre la situation d'équilibre est de l'ordre de $2N \ln(N)$.En considérant $N = 6 \times 10^{22}$ et une unité de temps de 10^{-5} secondes (comme dans l'analyse précédente) nous obtenons un temps d'attente de l'ordre de la seconde. Nous pouvons ainsi conclure que vous pouvez aller ouvrir vos fenêtres pour aérer sans prendre le risque que la fumée revienne.

Références

[Bar] Anouk Barberousse, *Ludwig Boltzmann, les théories physiques et les atomes*, *Images de la physique 2007*, CNRS, p. 11-16.

[Bio$_{\mathrm{LB}}$] *Ludwig Boltzmann (1844-1906)*, Institut de Physique Nucléaire de Lyon.

[Bio$_{\mathrm{EZ}}$] *Ernst Zermelo*, `Bibm@th.net`.

[Bio$_{\mathrm{PE}}$] *Paul Ehrenfest*, MacTutor History of Mathematics archive.

[Hen] Michel Henry, éditeur, *Autour de la modélisation en probabilités*, Commission inter-IREM *Statistique et Probabilités*, Didactiques, Presses Universitaires Franc-comtoises, 2001.

[PrC] *Probabilités au collège*, Ressources pour les classes du collège, DGESCO, mars 2008.

[PrL] Nouveaux programmes de mathématiques du lycée, Académie de Paris.

[Vel] Yvan Velenik, *Probabilités et Statistique*, notes de cours.

F. Des sujets détaillés

1. De quoi s'agit-il ?

En espérant que la lecture de cet article vous a plu... je vous propose dans les parties suivantes différentes manières d'aborder ce thème sous la forme d'activités ou de devoirs. Ne sachant pas quelles sont précisément les attentes des classes visées, je vous suggère de considérer ces sujets/activités comme un cadre que vous pouvez évidemment adapter à votre guise.

- **Activité pour le collège :** une façon d'aborder la notion de probabilité en testant en classe le temps d'attente d'un succès. Cette activité est accompagnée d'un script Python.
- **Devoirs pour le lycée et le supérieur :** ces devoirs proposent une démonstration très détaillée du théorème 2 bis.

2. Activité pour le collège

Réalisons une expérience aléatoire : nous lançons un dé à 6 faces jusqu'à l'obtention d'un 6.

Nous allons réaliser 10 fois l'expérience suivante : on lance le dé et on compte le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir un 6.

1. 10 lancers réalisés par le professeur :

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		moyenne
Nombre de lancers	4	10	2	10	10	6	4	5	10	9		7
											1/moyenne	0,14

2. Les 10 lancers des élèves : (un tableau par élève)

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		moyenne
Nombre de lancers												
											1/moyenne	

3. Comparer le résultat à la valeur approchée de 1/6. Que constatons-nous ?

Une interprétation : la probabilité de l'événement élémentaire 6 peut être perçu comme l'inverse du temps d'attente pour l'obtention du premier 6.

Simulation à l'aide du script Python :

```
import random as r
c=0.
N=500
for k in range(N):
    i=1
    while r.randint(1,6)!=6:
        i+=1
    c+=i
c/=N
print(1/c)
```

Nous obtenons la liste des résultats :

Nombre d'expériences	100	200	300	400	1000	10000	1/6
1/moyenne	0,17	0,167	0,177	0,15	0,165	0,164	0,167

3. Sujet pour le lycée

Partie 1 : Une chaîne de Markov à 2 états

Soient $p, q \in]0,1[$. Nous considérons qu'un mobile M se trouve à l'instant 0 sur le point A et se déplace au cours du temps du point A au point B de la manière suivante. Soit n un entier donné,

- si le mobile se trouve sur le point A à l'instant n :
  - il reste à l'instant $n+1$ en A avec probabilité $1-p$.
  - il se déplace à l'instant $n+1$ en B avec probabilité p.
- si le mobile se trouve sur le point B à l'instant n :
  - il reste à l'instant $n+1$ en B avec probabilité $1-q$.
  - il se déplace à l'instant $n+1$ en A avec probabilité q.

Nous noterons pour tout entier naturel n,

- x_n la probabilité que le mobile soit en A à l'instant n.
- y_n la probabilité que le mobile soit en B à l'instant n.

et X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} x_n \ , \ y_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n + y_n = 1$.
2. En notant A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$
montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = (\ 1\ ,\ 0\ )\, A^n$.

Partie 2 : Une matrice stochastique de taille 2×2

Soient $p, q \in]0,1[$, nous noterons dans cette partie
$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^2 - (2-p-q)A + ((1-p)(1-q) - pq)I_2 = 0$.
2. Nous notons pour tout entier k :
$$a_k = \frac{1-(1-p-q)^k}{p+q} \text{ et } b_k = (1-p-q)\frac{(1-p-q)^{k-1}-1}{p+q}.$$
Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = a_k A + b_k I_2$.
3. Montrer que la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \dfrac{q}{p+q}$ et $\beta = 1-\alpha$. (Nous remarquerons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k + b_k = 1$.)
Remarque : la convergence se fera coefficient par coefficient.
4. Montrer que $AB = B$ et $B^2 = B$.
5. Est-ce que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite lorsque $p = 1$ et $q = 1$?

Partie 3 : Interprétation

On conserve les notations des parties précédentes.

1. Montrer que (x_n) converge vers α et (y_n) converge vers β.
2. Les limites dépendent-elles des valeurs de x_0 et y_0 ?
3. Comment peut-on interpréter ce résultat asymptotique ?

4. Sujet pour le supérieur

Dans tout le problème, n sera un entier supérieur ou égal à deux. Nous noterons I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U la matrice colonne à n lignes ne contenant que des 1 :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Nous considérerons également les définitions et notations suivantes :

1. **Polynômes de matrice.**
   Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Nous noterons $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.
   Lorsque $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, nous noterons $P(A)$ la matrice carrée de taille $n \times n$ définie par
   $$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_q A^q,$$
   où q est le degré du polynôme P.
   Nous admettrons également que lorsque $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ alors $PQ(A) = P(A)Q(A)$ et $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$.
2. **Convergence matricielle.**
   Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, en notant $(a_{i,j}^{(k)})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ les coefficients de la matrice A_k,
   – nous dirons que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ lorsque
   $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] \ , \ \lim_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = b_{i,j}.$$
   Nous noterons dans ce cas, $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$.
   – Nous admettrons que lorsque les suites de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers A et B, alors la suite $(A_kB_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice AB.
3. **Matrices stochastiques.**
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous dirons que A est stochastique lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geq 0$ et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
   L'ensemble des matrices stochastiques de taille n sera noté S_n et l'ensemble des matrices de S_n dont tous les coefficients sont strictement positifs sera noté S_n^*.

Partie 1 : Une matrice stochastique de taille 2×2

Soient $p, q \in]0,1[$. Nous noterons dans cette partie

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A^2 - (2-p-q)A + ((1-p)(1-q) - pq)I_2 = 0$.
   Nous noterons $P_A = X^2 - (2-p-q)X + ((1-p)(1-q) - pq)$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que le reste de la division euclidienne de X^k par P_A est $a_k X + b_k$ où
$$a_k = \frac{1-(1-p-q)^k}{p+q} \text{ et } b_k = (1-p-q)\frac{(1-p-q)^{k-1}-1}{p+q}.$$
3. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = a_k A + b_k I_2$.
4. Montrer que la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \dfrac{q}{p+q}$ et $\beta = 1-\alpha$. (Nous remarquerons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k + b_k = 1$.)
5. Montrer que $AB = B$ et $B^2 = B$.
6. Est-ce que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite lorsque $p = 1$ et $q = 1$?

Partie 2 : Matrices stochastiques

Nous rappelons que la matrice colonne U est définie par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ à coefficients positifs, montrer l'équivalence $A \in S_n \Leftrightarrow AU = U$.
2. « Lois » de composition :
   (a) Montrer que S_n est stable par produit et $I_n \in S_n$.
   (b) Est-ce que $S_n \cap GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$? (La réponse sera détaillée dans le cas $n = 2$.)
   (c) Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $\forall A, B \in S_n$, $tA + (1-t)B \in S_n$.
   Est-ce que S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Limites dans S_n :
   (a) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de S_n, montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B alors $B \in S_n$.
   Une limite de matrices de S_n^* est-elle dans S_n^* ? (La réponse sera détaillée dans le cas $n = 2$.)
   (b) Un cas particulier : soit $A \in S_n$.
      i. Montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de S_n.
      ii. Montrer que si $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B alors B est une matrice de S_n vérifiant $B^2 = B$ et $AB = BA = B$.
   (c) Nous considérons dans cette question que $n \geq 3$, $A \in S_n^*$ et que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B. Nous noterons $(C_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ la famille des vecteurs colonnes de B.
      i. Montrer que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $AC_j = C_j$.
      ii. Montrer que si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{i,j}|$ alors A est inversible.
      (Indication : raisonner par contraposée et considérer $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0$.)
      iii. En notant E la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de $A - I_n$, montrer que E est inversible.

iv. En déduire que le rang de $A - I_n$ est $n-1$. Nous rappelons que lorsque $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous notons

$$\ker(B) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid BX = 0\}.$$

v. Montrer que $\ker(A - I_n) = \text{vect}(U)$.

vi. En déduire qu'il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ et $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j = \alpha_j U$.

Partie 3 : Convergence et limite des $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $A \in S_n^*$

On considère dans cette question $A \in S_n^*$. Nous nous proposons dans cette partie d'obtenir la convergence de la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et également de retrouver la forme de la limite obtenue à la question 3c de la partie 2.
Pour cela nous notons : $\forall Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$m(Y) = \min_{i\in[\![1,n]\!]}(y_i) \text{ et } M(Y) = \max_{i\in[\![1,n]\!]}(y_i).$$

Nous noterons $\forall Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k^Y = m(A^kY)$ et $v_k^Y = M(A^kY)$. Par commodité, nous pourrons si nécessaire au cours d'une preuve noter u_k pour u_k^Y et v_K pour v_k^Y.

1. Nous notons d le plus petit coefficient de A. Soit $Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $m(Y) \leq m(AY) \leq M(AY) \leq M(Y)$.
   (b) Montrer que $M(AY) \leq dm(Y) + (1-d)M(Y)$. (Nous admettrons pour la suite que nous avons de même : $m(AY) \geq dM(Y) + (1-d)m(Y)$.)
   (c) En déduire que $M(AY) - m(AY) \leq (1-2d)(M(Y) - m(Y))$.
2. Montrer que $d \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ puis que pour tout $Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les suites $(u_k^Y)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k^Y)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe $\ell_Y \in \mathbb{R}$ tel que $(A^kY)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_Y U$.
4. En déduire que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de la forme

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ \alpha_1 U & \cdots & \alpha_n U \\ | & & | \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

5. La correction pour le supérieur

Partie 1 : Une matrice stochastique de taille 2×2

> ***(1.)*** *Soient $p, q \in]0,1[$, nous noterons dans cette partie*
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$
>
> *Montrer que $A^2 - (2-p-q)A + ((1-p)(1-q) - pq)I_2 = 0$.*
> *Nous noterons $P_A = X^2 - (2-p-q)X + ((1-p)(1-q) - pq)$.*

Preuve 1. Il suffit d'effectuer le calcul matriciel pour conclure...

Preuve 2. (À l'aide d'un polynôme annulateur connu en dimension 2.) Sachant que $\mathrm{Tr}(A) = 2-(p+q)$, $\det(A) = ((1-p)(1-q) - pq)$ et que $X^2 - \mathrm{Tr}X + \det(A)$ est un polynôme annulateur de A, nous obtenons directement le résultat.

> ***(2.)*** *Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que le reste de la division euclidienne de X^k par P_A est $a_k X + b_k$ où*
>
> $$a_k = \frac{1-(1-p-q)^k}{p+q} \quad \text{et } b_k = (1-p-q)\frac{(1-p-q)^{k-1} - 1}{p+q}.$$

Notons R_k le reste de la division euclidienne de X^k par P_A. Sachant que P_A est de degré 2, R_k est de degré au plus 1. Il existe donc des réels a_k et b_k tels que $R_k = a_k X + b_k$.
Lorsque $k \in \{0,1\}$, nous obtenons directement que $R_k = X^k$.
Dans le cas général, nous « remarquons » que 1 est une racine évidente de P_A et par suite que

$$P_A = (X-1)(X-1+p+q).$$

En notant Q le quotient de la division euclidienne considérée, nous obtenons $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^k = Q(x)P_A(x) + R_k(x)$. En particulier nous en déduisons que $1 = R_k(1) = a_k + b_k$ et $(1-p-q)^k = R_k(1-p-q) = a_k(1-p-q) + b_k$. En résolvant le système obtenu, nous obtenons ainsi que $a_k = \dfrac{1-(1-p-q)^k}{p+q}$ et $b_k = (1-p-q)\dfrac{(1-p-q)^{k-1}-1}{p+q}$. (Ces résultats sont compatibles avec le cas $k \in \{0,1\}$.)

> ***(3.)*** *En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = a_k A + b_k I_2$.*

En conservant les notations des questions précédentes, nous obtenons $\forall k \in \mathbb{N}$, $R_k = a_k X + b_k$. En notant Q_k le quotient de la division euclidienne de X^k par P_A, nous obtenons que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$X^k = Q_k P_A + R_k.$$

En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = Q_k(A)P_A(A) + R_k(A)$. Sachant que $P_A(A) = 0$, nous obtenons que $A^k = R_k(A) = a_k A + b_k I_2$, ce qui donne le résultat attendu.

> ***(4.)*** *Montrer que la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \dfrac{q}{p+q}$ et $\beta = 1-\alpha$. (Nous remarquerons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k + b_k = 1$.)*

Sachant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k + b_k = 1$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = a_k A + b_k I_2 = \begin{pmatrix} (1-p)a_k + b_k & pa_k \\ qa_k & (1-q)a_k + b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - pa_k & pa_k \\ qa_k & 1 - qa_k \end{pmatrix}.$$

Sachant que $p, q \in]0, 1[$, nous avons $-1 < 1-p-q < 1$ et par suite $a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{p+q}$. Nous obtenons donc que la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{p}{p+q} & \dfrac{q}{p+q} \\ \dfrac{p}{p+q} & 1 - \dfrac{q}{p+q} \end{pmatrix}$, ce qui donne le résultat attendu.

(5.) *Montrer que* $AB = B$ *et* $B^2 = B$.

Il suffit de faire le produit matriciel

$$AB = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix} = B$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix} = B.$$

(6.) *Est-ce que* $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *admet une limite lorsque* $p = 1$ *et* $q = 1$ *?*

Nous avons dans ce cas $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par un calcul direct, nous obtenons $A^2 = I_2$. Nous obtenons ainsi par une récurrence « évidente » $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} = I_2$ et $A^{2k+1} = A$. La suite $(A^k)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet donc pas de limite.

Partie 2 : Matrices stochastiques

Nous rappelons que la matrice colonne U est définie par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(1.) *Soit* A *une matrice carrée de taille* $n \times n$ *à coefficients positifs, montrer l'équivalence* $A \in S_n \Leftrightarrow AU = U$.

Par definition de U, nous obtenons

$$AU = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc l'équivalence

$$AU = U \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Sachant que les coefficients de A sont positifs, nous obtenons ainsi le résultat par définition des matrices stochastiques.

(2a.) *Montrer que S_n est stable par produit et $I_n \in S_n$.*

Sachant que chaque ligne de I_n ne contient que des zéros et un UN, nous obtenons que $I_n \in S_n$.

Soient $A, B \in S_n$, montrons que $AB \in S_n$. Nous avons d'après la question précédente $ABU = A(BU) = AU = U$. D'après l'expression des coefficients d'une matrice produit, nous obtenons que les coefficients de AB sont positifs et par suite que $AB \in S_n$.

(2b.) *Est-ce que $S_n \cap GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$? (La réponse sera détaillée dans le cas $n = 2$.)*

La réponse est NON : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $S_2 \cap GL_2(\mathbb{R})$ d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est évidemment pas stochastique. (Un de ses coefficients est négatif.)

(2c.) *Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $\forall A, B \in S_n$, $tA + (1-t)B \in S_n$. Est-ce que S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?*

Soient $t \in [0,1]$, $A, B \in S_n$, nous avons $\forall i, j \in [\![1,n]\!]$,

$$(tA + (1-t)B)_{i,j} = ta_{i,j} + (1-t)b_{i,j}$$

Nous obtenons donc que les coefficients de $tA + (1-t)B$ sont positifs. Nous avons de plus que

$$(tA + (1-t)B)U = tAU + (1-t)BU = tU + (1-t)U = U$$

La question 1. permet d'affirmer que $tA + (1-t)B \in S_n$.

Sachant que $-I_n = (-1).I_n \notin S_n$, S_n n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(3a.) *Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de S_n, montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B alors $B \in S_n$. Une limite de matrices de S_n^* est-elle dans S_n^* ? (La réponse sera détaillée dans le cas $n = 2$.)*

Sachant que les coefficients de A^k sont positifs pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que le passage à la limite conserve les inégalités larges, nous obtenons que les coefficients de B sont positifs.
De plus par convergence, nous avons $A_k U \xrightarrow[k\to+\infty]{} BU$. Sachant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k U = U$, nous obtenons par unicité de la limite que $BU = U$. La question 1 permet de conclure pour la première partie de la question.

Nous notons $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 1 - \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$. Nous obtenons par définition que $\forall k \geq 2$, $A_k \in S_2^*$ et $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2^*$. Ce qui répond à la deuxième partie de la question.

> ***(3b.)*** *Un cas particulier : soit $A \in S_n$*
>
> *i. Montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de S_n.*
>
> *ii. Montrer que si $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B alors B est une matrice de S_n vérifiant $B^2 = B$ et $AB = BA = B$.*

i. Sachant que S_n est stable par produit, nous obtenons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in S_n$.

ii. Nous avons par hypothèse que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B. En particulier les suites de matrices $(A^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(A^{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la matrice B.
Or $A^{2k} = A^kA^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B\times B = B^2$, $A^{k+1} = AA^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A\times B = AB$ et $A^{k+1} = A^kA \xrightarrow[k\to+\infty]{} BA$, par unicité de la limite nous obtenons les égalités attendues.

> ***(3c.)*** *Nous considérons dans cette question que $n \geq 3$, $A \in S_n^*$ et que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B. Nous noterons $(C_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ la famille des vecteurs colonnes de B.*
>
> *i. Montrer que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $AC_j = C_j$.*
>
> *ii. Montrer que si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{i,j}|$ alors A est inversible.*
>
> *(Indication : raisonner par contraposée et considérer $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ tel que $AX = 0$.)*
>
> *iii. En notant E la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de $A - I_n$, montrer que E est inversible.*
>
> *iv. En déduire que le rang de $A - I_n$ est $n-1$.*
>
> *v. Montrer que $\ker(A - I_n) = \mathrm{vect}(U)$.*
>
> *vi. En déduire qu'il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ et $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = \alpha_j U$.*

i. Il s'agit d'une traduction de l'égalité $AB = B$.

ii. On suppose que A n'est pas inversible, il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0$.
Nous notons $i_0 \in [\![1,n]\!]$, $|x_{i_0}| = \max |x_i|$. En considérant la ligne i_0 de l'égalité $AX = 0$, nous obtenons $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = 0$. Nous obtenons d'après l'inégalité triangulaire

$$|a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| = |-a_{i_0,i_0}x_{i_0}| = \left|\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j\right| \leq \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\ \ |x_j| \leq |x_{i_0}| \left(\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\right).$$

Sachant que $X \neq 0$, nous obtenons que $|x_{i_0}| > 0$, ce qui implique que

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \left(\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\right),$$

ce qui donne le résultat attendu par contraposée.

iii. Il suffit d'après la question précédente de montrer que $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $|e_{i,i}| > \sum\limits_{j\neq i} |e_{i,j}|$.
Par définition de E (mais également de $A \in S_n^*$) nous avons $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $|e_{i,i}| = 1 - a_{i,i} > 0$ et $\sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{n-1} |e_{i,j}| = \sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{n-1} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} - a_{i,i} - a_{i,n} = 1 - a_{i,i} - a_{i,n}$. Sachant que $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $a_{i,n} > 0$, nous obtenons que $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $|e_{i,i}| > \sum\limits_{j\neq i} |e_{i,j}|$ et par suite que E est inversible.

iv. Sachant que $AU = U$ (i.e. $(A - I_n)U = 0$) et $U \neq 0$, nous obtenons que $A - I_n$ n'est pas inversible.
En considérant le rang de $A - I_n$ comme la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille des vecteurs colonnes de $A - I_n$, pour conclure il suffit de montrer que les $n-1$ premières colonnes de $B = A - I_n$ forment une famille libre.
Si la famille des $n-1$ premières colonnes de B est liée nous obtenons que la famille des colonnes (les « $n-1$ ») de la matrice E est liée. Ce qui indique que E n'est pas inversible. Nous obtenons ainsi le résultat en raisonnant par l'absurde.
Remarque : nous aurions pu utiliser ici la caractérisation suivante : le rang de la matrice B est la taille maximale des matrices inversibles extraites de B.

v. En notant $B = A - I_n$ et en considérant l'application linéaire

$$g : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & BX \end{pmatrix},$$

nous obtenons, d'après la question précédente, que le rang de g est $n-1$. La formule du rang appliquée à g nous permet d'obtenir que $\ker(A - I_n) = \ker(g)$ est de dimension 1. U étant un vecteur non nul de $\ker(A - I_n)$ il en est automatiquement une base ce qui implique en particulier que $\ker(A - I_n) = \mathrm{vect}(U)$.

vi. D'après les égalités $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $AC_j = C_j$, nous en déduisons que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j \in \ker(A - I_n)$. La question précédente nous donne ainsi l'existence de $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j = \alpha_j U$.
Sachant que les coefficients de B sont positifs, nous obtenons que $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$. Les égalités $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j = \alpha_j U$ nous indiquent que $BU = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j\right) U$. Sachant que $BU = U$, par identification nous obtenons ainsi l'égalité demandée : $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$.

Partie 3 : Convergence et limite des $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $A \in S_n^*$

> ***(1a.)*** *On considère dans cette question $A \in S_n^*$. Nous nous proposons dans cette partie d'obtenir la convergence de la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et également de retrouver la forme de la limite obtenue à la question 3c de la partie 2.*
> *Pour cela nous notons : $\forall Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,*
>
> $$m(Y) = \min_{i\in[\![1,n]\!]} (y_i) \text{ et } M(Y) = \max_{i\in[\![1,n]\!]} (y_i).$$
>
> *Nous noterons $\forall Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k^Y = m(A^kY)$ et $v_k^Y = M(A^kY)$. Par commodité, nous pourrons si nécessaire au cours d'une preuve noter u_k pour u_k^Y et v_K pour v_k^Y.*
> *Nous notons d le plus petit coefficient de A. Soit $Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
>
> *Montrer que $m(Y) \leq m(AY) \leq M(AY) \leq M(Y)$.*

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, nous avons $(AY)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j$. Sachant que $A \in S_n$ nous obtenons que

$$(AY)_i - m(Y) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geq 0} \underbrace{(y_j - m(Y))}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{et} \quad M(Y) - (AY)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geq 0} \underbrace{(M(Y) - y_j)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Nous obtenons en particulier que $m(Y) \leq m(AY) \leq M(AY) \leq M(Y)$.

> ***(1b.)*** *Montrer que $M(AY) \leq dm(Y)+(1-d)M(Y)$. (Nous admettrons pour la suite que nous avons de même : $m(AY) \geq dM(Y)+(1-d)m(Y)$.)*

Nous notons $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $y_{j_0} = m(Y)$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} (AY)_i & = & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \\ & = & a_{i,j_0} m(Y) + \sum_{j=1, j\neq j_0}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geq 0} \underbrace{y_j}_{\leq M(Y)} \\ & \leq & a_{i,j_0} m(Y) + \sum_{j=1, j\neq j_0}^{n} a_{i,j} M(Y) \\ & \leq & a_{i,j_0} m(Y) + (1 - a_{i,j_0}) M(Y) \\ & \leq & M(Y) + \underbrace{(m(Y) - M(Y))}_{\leq 0} a_{i,j_0}. \end{array}$$

Le membre de droite étant décroissant en a_{i,j_0} et d étant le plus petit élément de A, nous obtenons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$$(AY)_i \leq M(Y) + (m(Y) - M(Y))d = dm(Y) + (1-d)M(Y),$$

ce qui implique que $M(AY) \leq dm(Y) + (1-d)M(Y)$.

> ***(1c.)*** *En déduire que $M(AY) - m(AY) \leq (1-2d)(M(Y) - m(Y))$.*

Il suffit de combiner les inégalités de la question précédente :

$$M(AY) \leq dm(Y) + (1-d)M(Y) \text{ et } -m(AY) \leq -dM(Y) + (d-1)m(Y).$$

> ***(2.)*** *Montrer que $d \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ puis que pour tout $Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les suites $(u_k^Y)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k^Y)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*

Montrons que $d \in]0, 1/2]$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, sachant que $A \in S_n^*$, nous avons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} \geq d > 0$. Ce qui implique que

$$0 < nd = \sum_{j=1}^{n} d \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Donc $0 < d \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$ ce qui permet de conclure.

Soit $Y = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrons que les suites $(u_k^Y)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k^Y)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après les questions précédentes, nous obtenons par récurrence que $(u_k^Y)_{k\in\mathbb{N}} = (m(A^kY))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_k^Y)_{k\in\mathbb{N}} = (M(A^kY))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante ainsi que $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_k^Y - u_k^Y \leq (1-2d)^k(M(Y) - m(Y))$. Pour obtenir que les suites sont adjacentes il suffit de montrer que $(v_k^Y - u_k^Y)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Sachant que $d \in]0, 1/2]$, nous avons $(1-2d)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et par suite le résultat par encadrement.

> *(3.) En déduire que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe $\ell_Y \in \mathbb{R}$ tel que $(A^kY)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_Y U$.*

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par définition nous avons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$u_k^Y \leq (A^kY)_i \leq v_k^Y$$

En notant $\ell_Y \in \mathbb{R}$ la limite commune de u^Y et v^Y nous obtenons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(A^kY)_i \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell_y$. (nous remarquons que le limite ne dépend pas de i). Ce qui traduit précisément la convergence $A^kY \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell_Y U$.

> *(4.) En déduire que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de la forme*
>
> $$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ \alpha_1 U & \cdots & \alpha_n U \\ | & & | \end{pmatrix},$$
>
> *avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.*

Nous notons $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = \ell_{E_i}$. Par définition de la convergence matricielle, nous avons

$$(A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } B \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ (A^kE_i)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } C_i$$

où la famille des (C_i) est la famille des vecteurs colonnes de la matrice B. La question précédente permet d'affirmer que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(A^kE_i)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha_i U$. Nous obtenons ainsi que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de la forme

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ \alpha_1 U & \cdots & \alpha_n U \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Il suffit pour conclure de montrer que $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ ainsi que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

En reprenant le résultat ainsi que la preuve de la question vi de la partie 2 nous obtenons le résultat attendu.

Alexandre Marino
marino.alex@gmail.com
Lycée Joffre
150 Allée de la Citadelle, 34000 Montpellier.