Le Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est bien connu des étudiants de licence et de classes préparatoires. Dans une première partie, nous en donnerons l'historique, dans la problématique de la définition des nombres réels de Cauchy à Dedekind et Cantor. Dans une deuxième partie, nous donnerons plusieurs démonstrations du théorème et dans une troisième son extension à la notion de compacité dans les espaces métriques.

Mots-clefs. Analyse, Nombres réels, Bolzano, Weierstrass.

Niveau. Terminale, Licence 1 et 2, Classes préparatoires MP, PC, PSI

Anecdote personnelle : *Les taupins associent automatiquement le nom de Bolzano à celui de Weierstrass, ce qui peut être parfois bien utile... À mon intégration à l'X en 1969, nous fûmes immédiatement envoyés au camp du Larzac pour un stage militaire de trois semaines. Un jour, nous étions en manœuvres contre un escadron de la Légion étrangère ; nous n'en menions pas large, car les légionnaires avaient la réputation de ne pas bien faire la différence entre les manœuvres et les combats réels... Le soir tombé, nous étions un petit groupe de six ou huit, cachés derrière un fourré, les oreilles aux aguets. Soudain, nous perçûmes une présence dans l'ombre à quelques mètres de nous. Ami ou ennemi ? En chuchotant, nous regrettions de ne pas avoir choisi préalablement un mot de passe, lorsque l'un de nous lança d'une voix un peu plus forte : "Bolzano...". Loin de répondre "Weierstrass" comme nous l'attendions de quelqu'un qui vient de passer les concours moins de trois mois auparavant, l'ombre murmura : "Oui, c'est moi !". Nous détalâmes à toute allure et le pauvre légionnaire ne dut pas comprendre pourquoi sa ruse n'avait pas marché !*

Rappelons l'énoncé de ce fameux théorème, dans les termes des programmes actuels :

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

A. Historique

1. Bernhard Bolzano. 1781-1848

1.1. Mathématicien, philosophe et logicien

FIGURE 1 – Bernhard Bolzano

Né à Prague, dans l'Empire d'Autriche, le 5 octobre 1781, Bernhard Bolzano étudie à l'Université de cette ville les mathématiques, la philosophie et la physique. Devenu prêtre en 1804, il enseigne les sciences de la religion tout en poursuivant pour lui-même des recherches personnelles. Il s'intéresse particulièrement à la logique à laquelle il tente de donner des bases rigoureuses, qui sont les prémices de la logique mathématique actuelle.

En philosophie, il s'oppose à Kant et réfute la notion d'*intuition a priori*. Pour lui, on ne peut connaître le réel que par les propriétés qu'en perçoivent nos sens. Le modèle que nous imaginons à partir de ces propriétés n'a aucune existence objective et peut nous induire en erreur. Prémonition géniale lorsque l'on songe aux affres des physiciens, un siècle plus tard, devant l'interprétation de la mécanique quantique ! En mathématiques, Bolzano aura toujours ce souci de s'abstraire de l'intuition : il donnera en 1833 le premier un exemple de fonction partout continue et nulle part dérivable, mais son manuscrit fut oublié (il ne resurgit qu'en 1921) et Weierstrass provoqua la surprise souvent incrédule de ses contemporains en publiant en 1872 d'autres exemples de telles fonctions, qui feront dire plus tard à Hermite : "*Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée*".

1.2. Les nombres réels selon Bolzano

En analyse, Bolzano perçoit la nécessité de caractériser les *grandeurs réelles* (nous dirions maintenant *nombres réels*). Il considère qu'une telle grandeur est parfaitement définie si l'on sait en trouver un encadrement aussi précis que l'on veut par des valeurs connues (par exemple rationnelles, ou même décimales). Si l'unicité d'un tel objet est irréfutable, son existence pose une question à laquelle seule peut répondre une construction explicite de l'ensemble des nombres réels, dont le concept même échappe totalement à Bolzano à son époque. Mais il n'est finalement pas très loin de la notion de *coupure*, qui permettra à Dedekind en 1872 de proposer une telle construction [Gou2]. Cantor proposa à peu près à la même époque une autre construction fondée sur les suites de Cauchy de rationnels [Gou1].

En termes modernes, Bolzano considère la propriété des *segments emboîtés* comme une sorte d'*axiome*, bien qu'il n'emploie pas ce mot : Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $I_n = [a_n, b_n]$, est une suite de segments décroissante pour l'inclusion ($I_{n+1} \subset I_n$) et dont l'amplitude $|b_n - a_n|$ tend vers 0, son intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton. Autrement dit, il existe un réel et un seul appartenant à tous les segments I_n.

1.3. Le théorème de Bolzano

Dans le *Rein analytischer Beweis* (Démonstration purement analytique), paru en 1817, Bolzano se propose de démontrer sans l'aide de l'intuition géométrique un théorème qui portera son nom et qui équivaut à notre *théorème des valeurs intermédiaires* : "*Zwischen je zwei Werthen, die ein entgegensetztes Resultat gewähren, liege wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung*" (Entre deux valeurs donnant des résultats de signes opposés, se trouve au moins une racine de l'équation). Cette équation est de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Dans cet ouvrage, il commence par donner une définition précise de la notion de *fonction continue*, très proche de l'acception actuelle. Puis, en s'appuyant sur la propriété des segments emboîtés, il énonce et démontre, quatre ans avant Cauchy, ce que nous appelons désormais le *critère de Cauchy*, qui permet d'exprimer la convergence d'une suite sans évoquer sa limite. Il en déduit la *propriété de la borne supérieure*, qui sert actuellement de porte d'entrée axiomatique à l'ensemble des nombres réels à défaut d'une construction formelle. Armé de ces outils, il démontre très rigoureusement son théorème, par *dichotomie* : partant d'un segment $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) \leq 0$, il coupe ce segment en deux moitiés : $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$, dont l'une au moins vérifie encore cette hypothèse. De proche en proche, il construit ainsi une suite de segments emboîtés dont les amplitudes sont en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et par conséquent tendent vers 0. L'intersection de cette famille de segments est un singleton $\{x_0\}$ et Bolzano montre soigneusement que $f(x_0) = 0$. Cette méthode inspirera Weierstrass un demi-siècle plus tard, ce qui vaudra à Bolzano d'associer son nom à celui du grand maître allemand dans le théorème qui nous occupe.

1.4. La rigueur selon Bolzano

Augustin Cauchy, dans son *Cours d'analyse* de 1821, considérait comme *évident*, et par conséquent inutile à démontrer, le fait qu'une courbe d'équation $y = f(x)$, où f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ rencontre *nécessairement* toute droite d'équation $y = c$, où c est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. [Sin, p.106].

Bolzano rejette résolument ce genre d'argument : "*une affirmation aussi incorrecte nécessite à peine une réfutation, et elle ne serait même pas mentionnée ici, si elle ne nous servait à montrer à quel point les concepts de plusieurs mathématiciens, même réputés, concernant ce sujet sont encore indistincts.*" [Moo]

Contrairement à celle de Cauchy, la démarche quasiment *axiomatique* de Bolzano permet de comprendre pourquoi ce théorème ne fonctionne pas si l'on se restreint aux fonctions d'une variable *rationnelle* : par exemple, la fonction f de $\mathbb{Q} \cap [0, 2]$ dans $\mathbb{Q}$ définie par $f(x) = x^2$ ne prend jamais la valeur 2, pourtant intermédiaire entre $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$. En effet, l'ensemble $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété des segments emboîtés (il suffit d'imaginer les segments donnant les approximations décimales à 10^{-n} près, respectivement par défaut et par excès, de l'irrationnel $\sqrt{2}$).

On objectera que, si Cauchy admet sans démonstration la propriété des valeurs intermédiaires, Bolzano en fait autant, du moins implicitement, avec celle des segments emboîtés. C'est que ce dernier, adepte rappelons-le de logique, s'intéresse moins aux résultats mathématiques pour eux-mêmes qu'aux relations de causalité qui les relient. Aux yeux de Bolzano, le but d'un théorème n'est pas d'établir une vérité, mais de mettre en évidence les liens qui rattachent un énoncé à d'autres déjà fondés et, de proche en proche, à un système d'axiomes les plus simples possible.

1.5. Et le théorème de Bolzano-Weierstrass ?

Il est patent que Bolzano n'a jamais énoncé le théorème dans lequel son nom est désormais lié à celui de Weierstrass. C'est à ce dernier que revient l'entière paternité du théorème. Cependant, il utilisa pour le démontrer les idées de Bolzano et la méthode qu'il avait mise au point pour son propre théorème trente années plus tôt.

Bernhard Bolzano mourut le 18 décembre 1848, à l'âge de 67 ans, des suites d'une tuberculose. C'est dans une lettre adressée à Georg Cantor en 1870 que Hermann Schwarz proposa, en reconnaissance du génie de Bolzano, de réunir son nom à celui de Weierstrass pour désigner le théorème.

L'œuvre immense de Bolzano resta longtemps dans l'oubli et dut attendre jusqu'en 1930 pour être totalement étudiée et analysée.

2. Karl Weierstrass. 1815-1897

2.1. Une réussite tardive

Figure 2 – Karl Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass est né le 31 octobre 1815 à Ostenfeld (Westphalie). Au *gymnasium* (lycée), il se passionne pour les mathématiques, mais son père, inspecteur des impôts, le contraint à suivre des études de droit et d'économie qui ne l'intéressent pas. Après quatre années à l'Université de Bonn, où il fréquente davantage l'académie d'escrime et les cabarets que les bancs de la faculté, il ressort sans le moindre diplôme. Il poursuit alors deux années d'études à l'Académie théologique et philosophique de Münster pour devenir professeur de collège. Il y suit l'enseignement de Christoph Gudermann, élève de Gauss, qui l'encourage à persévérer dans son activité mathématique. À partir de 1842, en marge de sa charge d'enseignement qui l'ennuie profondément, il poursuit seul des recherches sur les *fonctions elliptiques*, mais il reste inconnu de la communauté mathématique. Ce n'est qu'en 1854 (à près de quarante ans) qu'un article intitulé "*Zur Theorie des Abelschen Functionen*" (Sur la théorie des fonctions abéliennes), publié dans le prestigieux *Journal de Crelle*, lui vaut une célébrité immédiate. Il obtient le titre de *docteur Honoris Causa* et une chaire à l'Université de Königsberg, puis deux ans plus tard à celle de Berlin.

2.2. Le père de l'analyse moderne

Commence alors une période extrêmement féconde au sein de l'Université de Berlin. Outre ses travaux sur les fonctions et intégrales elliptiques, les fonctions analytiques, l'intégration, Weierstrass entreprend une *algébrisation* de l'analyse. Il s'agit de se débarasser définitivement des notions vagues comme les *infiniment petits* hérités des deux siècles précédents.

Il commence par définir rigoureusement les nombres réels à partir de leur *développement décimal illimité*. C'est au fond un approfondissement de la notion adoptée par Bolzano et un prélude à la construction de l'ensemble des réels par Dedekind. Il définit ensuite les limites et la continuité, comme nous les connaissons aujourd'hui (*avec des* ε). Il met en évidence le concept de *convergence uniforme* et ses applications à la convergence des suites et séries de fonctions et d'intégrales.

2.3. Enfin notre théorème !

Ébauchant la topologie, Weierstrass définit un *point d'accumulation* d'un ensemble de réels : On appelle point d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{R}$, un réel α tel que tout intervalle ouvert de centre α contient au moins un point de A autre que α (il en contient donc une infinité).

On remarquera qu'un point d'accumulation d'une partie A peut ou non appartenir à A. Exemples :

- $A = [0, 1[$. 0 et 1 sont des points d'accumulation de A (de même que tout point de $[0, 1]$) et $0 \in A$, $1 \notin A$.
- $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. 0 est un point d'accumulation de A (c'est le seul) et $0 \notin A$.

Il énonce et démontre alors le théorème que nous attendons, sous la forme :

BW1 : Tout ensemble infini et borné de nombres réels admet au moins un point d'accumulation.

Sa démonstration s'inspire, comme nous l'avons dit, de celle employée par Bolzano pour son théorème : la dichotomie. Si l'ensemble A est infini et borné, il est inclus dans un segment $[a, b]$, avec $a < b$. L'un au moins des segments $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$ contient encore une infinité de points de A. De proche en proche, on construit une suite de segments emboîtés dont les amplitudes tendent vers 0. Leur intersection est un singleton $\{x_0\}$ et, par construction, tout intervalle ouvert centré en x_0 contient une infinité de points de A, c'est-à-dire que x_0 est un point d'accumulation de A.

C'est en substance la première démonstration que nous présenterons dans le paragraphe suivant, avec la version séquentielle du théorème.

2.4. Une fin douloureuse

À partir de 1850, la santé de Weierstrass se détériore. En 1861, une attaque l'affaiblit considérablement. En 1885, il se fâche avec son ami Kronecker, qui réfute sa définition des nombres réels ainsi que la théorie des transfinis de Georg Cantor. Kronecker est un *constructiviste*, qui n'admet en mathématiques que les objets que l'on peut construire à partir des nombres entiers en un nombre fini d'étapes. Cette théorie, qui vide les mathématiques d'une grande partie de leur substance, est aujourd'hui abandonnée. En 1891, Weierstrass est très affecté par le décès à 41 ans de Sophia Kovalevskaya, une de ses anciennes étudiantes à qui il avait donné des cours particuliers en 1869 car, du fait de son sexe, elle ne pouvait pas entrer à l'Université de Berlin(!) Il l'avait aidée à obtenir une chaire à l'Université de Göttingen en 1874 et échangeait avec elle une correspondance régulière sur un grand nombre de questions mathématiques. Malade et déprimé, Karl Weierstrass passe les trois dernières années de sa vie prostré dans un fauteuil roulant. Il meurt le 19 février 1897 à Berlin.

B. Le théorème et ses démonstrations

1. Caractérisation séquentielle d'un point d'accumulation

L'usage des suites facilite la compréhension et la manipulation de la notion de point d'accumulation. Montrons qu'un réel α est un point d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe une suite non stationnaire d'éléments de A qui converge vers α.

- S'il existe une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$. Comme la suite n'est pas stationnaire, l'un au moins de ces termes est différent de α. Ainsi, tout intervalle ouvert de centre α contient un point de A autre que α : le réel α est un point d'accumulation de A.
- Soit α un point d'accumulation de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}[$ contient au moins un point de A autre que α, que nous noterons u_n. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ et pour tout entier $n \geq n_0$:

  $$u_n \in \ ]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}[\ \subset \ ]\alpha - \frac{1}{n_0}, \alpha + \frac{1}{n_0}[\ \subset \ ]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$$

  ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, composée d'éléments de A, converge vers α. Comme pour tout entier n, $u_n \neq \alpha$, cette suite n'est pas stationnaire.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass peut alors s'énoncer sous la forme :

BW2 : Pour toute partie A infinie et bornée de $\mathbb{R}$, il existe une suite non stationnaire d'éléments de A qui converge.

2. Énoncé en termes de suites extraites

Rappelons que l'on appelle suite extraite d'une suite (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Elle est donc formée en sélectionnant en ordre strictement croissant certains indices de la suite initiale.

Considérons une suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et A l'ensemble des valeurs de la suite.

- Si A est infini, il existe d'après l'énoncé BW2 une suite non stationnaire d'éléments de A qui converge. Soit α sa limite. Posons $\varphi(0) = 0$. Pour tout entier $n > 0$, il existe un indice que l'on peut appeler $\varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} \in]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}[$. Comme il en existe même une infinité, on peut choisir $\varphi(n) > \varphi(n-1)$, de sorte que l'application φ soit strictement croissante. Alors, la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α.
- Si au contraire l'ensemble A est fini, il existe un élément a de A qui est atteint pour une infinité d'indices, d'où une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire en a, donc convergente.

On peut donc exprimer le théorème de Bolzano-Weierstrass sous la forme *séquentielle*, qui est adoptée désormais par les programmes des classes préparatoires MPSI et MP :

BW3 : De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

3. Première démonstration : Dichotomie

C'est la démonstration historique de Weierstrass, inspirée des méthodes de Bolzano et adaptée à la version séquentielle du théorème. Elle suppose connue la propriété des segments emboîtés.

Soit (u_n) une suite réelle bornée : il existe deux réels m et M tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ m \leq u_n \leq M$. Posons $I_0 = [m, M]$. L'un au moins des deux segments $[m, \frac{m+M}{2}]$ ou $[\frac{m+M}{2}, M]$ contient les termes de la suite pour une infinité d'indices. Appelons-le I_1.

En recommençant cette opération, on obtient une suite de segments emboîtés I_n, d'amplitude $\frac{M-m}{2^n}$, qui tend vers 0, telle que chaque segment I_n contienne les termes de la suite pour une infinité d'indices. D'après le théorème des segments emboîtés, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton $\{\alpha\}$. Pour chaque segment I_n, il existe une infinité d'indices p tels que $u_p \in I_n$; on peut donc en choisir un que l'on notera $\varphi(n)$ strictement plus grand que l'indice $\varphi(n-1)$ choisi pour le segment précédent (on peut choisir librement $\varphi(0)$ puisque I_0 contient tous les termes de la suite). L'application φ est strictement croissante, donc la suite $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de (u_n) et elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \left|u_{\varphi(n)} - \alpha\right| \leq \frac{M-m}{2^n}$$

Elle converge donc vers α.

4. Deuxième démonstration : "Vue sur la mer"

Nous allons voir maintenant une autre démonstration très simple qui nécessite seulement de savoir que toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) converge.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Distinguons deux sortes d'indices :

$$\begin{cases} A = \{n \in \mathbb{N},\ \ \forall p \geq n,\ \ u_p \leq u_n\} \\ B = \{n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ \ u_p > u_n\} \end{cases}$$

Les ensembles A et B sont ordonnés par la restriction de l'ordre de $\mathbb{N}$. Il est clair qu'ils forment une partition de $\mathbb{N}$. Il y a alors deux cas :

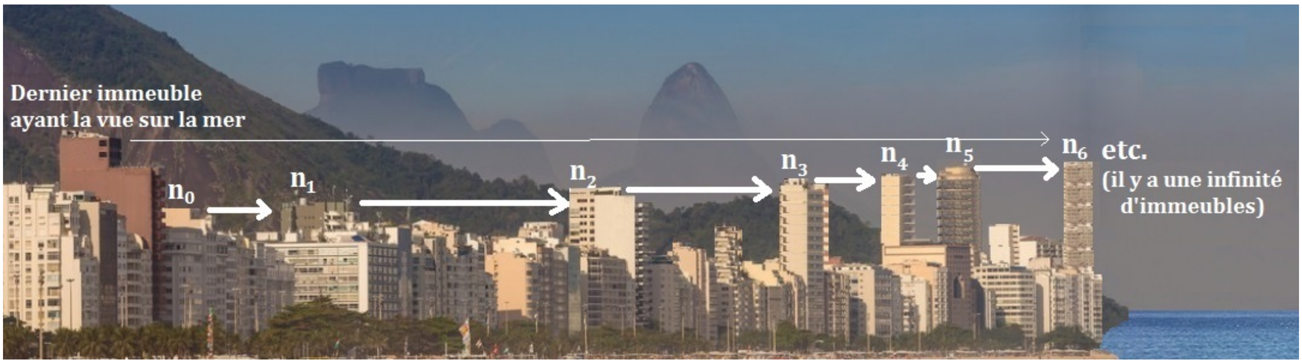
– Si l'ensemble A est infini, la suite extraite $(u_n)_{n\in A}$ est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge.
– Si l'ensemble A est fini, à partir d'un certain rang n_0, tous les entiers appartiennent à B. D'après la définition de B, il existe $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0}$, puis $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$, puis, par récurrence, pour tout entier k : $n_{k+1} > n_k$ tel que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$. L'application $\varphi : k \mapsto n_k$ est strictement croissante. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc extraite de (u_n) et strictement croissante. Comme elle est majorée, elle converge.

Dans tous les cas, on a trouvé une suite extraite de (u_n) qui converge.

Cette démonstration porte parfois le nom de « vue sur la mer ». On peut en effet se figurer les termes de la suite comme des hauteurs d'immeubles en front de mer (on suppose qu'il y a une infinité d'immeubles !) Quitte à ajouter une constante, on suppose que le minorant de ces hauteurs est strictement positif, le zéro étant le niveau de la mer. Les immeubles de catégorie A sont plus grands que tous ceux qui sont devant : ils ont *la vue sur la mer*. Ceux de catégorie B ont la vue bouchée par au moins un immeuble plus grand situé plus en avant. Ce petit habillage permet de mémoriser facilement la définition des ensembles A et B.

– S'il y a une infinité d'immeubles ayant la vue sur la mer, ils forment une suite de hauteurs décroissantes.

– Si au contraire il n'y en a qu'un nombre fini, à partir d'un certain rang tous les immeubles ont la vue bouchée. L'immeuble n_0 a la vue bouchée par l'immeuble n_1, qui a la vue bouchée par l'immeuble n_2, etc. On crée ainsi une suite d'immeubles de hauteurs croissantes.



5. Extension aux espaces vectoriels normés de dimension finie

5.1. Cas de $\mathbb{R}^2$

Rappelons que $\mathbb{R}^2$ peut être muni d'une norme, par exemple la norme euclidienne, définie par : $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|u_n\| \leq M$. Montrons que le théorème de Bolzano-Weierstrass reste valable dans $\mathbb{R}^2$:

BW4 : De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^2$, on peut extraire une suite convergente.

Soit $(u_n = (x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}^2$. Chacune des suites réelles (x_n) et (y_n) est bornée. On peut donc extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, de limite α. La suite $(y_{\varphi(n)})$, extraite de (y_n), est encore bornée ; on peut donc en extraire une suite convergente $(y_{\psi\circ\varphi(n)})$, de limite β. La suite $(x_{\psi\circ\varphi(n)})$ est extraite de la suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, elle converge donc vers la même limite α. Ainsi, la suite $(u_{\psi\circ\varphi(n)} = (x_{\psi\circ\varphi(n)}, y_{\psi\circ\varphi(n)})$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers (α, β).

5.2. Cas de $\mathbb{R}^n$ et des espaces normés de dimension finie

Ce résultat se généralise facilement par récurrence à tout espace $\mathbb{R}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de là à tout espace vectoriel normé réel de dimension finie, qui est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, où n est la dimension de cet espace.

En remarquant que l'espace $\mathbb{C}$ des nombres complexes est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, le théorème de Bolzano-Weierstrass est encore valable dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ et dans tout espace vectoriel normé complexe de dimension finie.

5.3. Contre-exemple en dimension infinie

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Munissons-le de la norme définie pour le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par : $\|P\| = \max_{0\leq k\leq n} |a_k|$. Considérons la suite de polynômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces polynômes sont tous de norme 1, donc la suite est bornée. Supposons que l'on puisse en extraire une suite $(X^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un polynôme P de degré p. Pour tout n tel que $\varphi(n) > p$, $\|X^{\varphi(n)} - P\| = 1$, ce qui contredit la convergence. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ne s'applique pas dans l'espace E. Nous expliquerons pourquoi un peu plus loin (voir théorème de Riesz).

C. Extension aux espaces métriques

1. Espaces métriques

On appelle *espace métrique* un ensemble E muni d'une distance d, c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ \ d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $\forall (x, y) \in E^2,\ \ d(x, y) = d(y, x)$;
3. $\forall (x, y, z) \in E^3,\ \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Par exemple, une partie A d'un espace vectoriel normé, munie de la distance associée à la norme : $d(x, y) = \|x - y\|$, est un espace métrique.

La définition des espaces métriques a disparu des programmes des classes préparatoires. En MP, on ne s'en sert implicitement que dans le cadre de l'exemple précédent.

2. Espaces compacts

À l'aube du 20-ième siècle, la thèse d'*Emile Lebesgue* en 1894 sur les recouvrements dénombrables d'un intervalle, la généralisation donnée en 1904 par *Henri Léon Lebesgue* pour les recouvrements non dénombrables, l'introduction par *Maurice Frechet* en 1906 de la notion d'espace métrique, ont permis de faire émerger la notion de compacité et d'éclairer d'un nouveau jour le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit E un espace métrique (par exemple une partie d'un espace vectoriel normé). On appelle *recouvrement* de E une famille de parties de E dont la réunion est égale à E. On dit que E est *compact* s'il vérifie la propriété de *Borel-Lebesgue* :

(BL) *Pour tout recouvrement de E par des ouverts, il existe un sous-recouvrement fini.*

Autrement dit, s'il existe une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i = E$, alors il existe une partie finie J de I telle que $\bigcup\limits_{i\in J} \mathcal{O}_i = E$.

Un espace métrique E est dit *séquentiellement compact* s'il vérifie la propriété de *Bolzano-Weierstrass*[1] :

(BW) *De toute suite d'éléments de E on peut extraire une suite convergente dans E.*

Montrons que ces deux définitions sont équivalentes :

- Soit E un espace métrique vérifiant (BL). Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E ne possédant pas de sous-suite convergente. Alors, pour tout $x \in E$, il existe une boule ouverte $B(x, r_x)$ de centre x ne contenant qu'un nombre fini de points de la suite. La famille $(B(x, r_x))_{x\in E}$ est un recouvrement ouvert de E. D'après (BL), il en existe un sous-recouvrement fini, ce qui implique que la suite (u_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs. L'une au moins de ces valeurs est atteinte pour une infinité d'indices, ce qui permet de construire une sous-suite convergente, en contradiction avec l'hypothèse. Donc (BL) $\Rightarrow$ (BW).
- Réciproquement, soit E un espace métrique vérifiant (BW). Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Montrons d'abord qu'il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans l'un des ouverts $\mathcal{O}_i$ du recouvrement. Si ce n'était pas le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existerait une boule ouverte $B(x_n, 2^{-n})$ qui ne serait contenue dans aucun de ces ouverts. D'après (BW), on pourrait extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui convergerait vers un élément x de E. Comme les $\mathcal{O}_i$ recouvrent E, l'un au moins $\mathcal{O}_{i_0}$ contient x, donc une boule ouverte de centre x, de rayon ρ. Pour n suffisamment grand, la boule ouverte $B(x_{\varphi(n)}, 2^{-\varphi(n)})$ est incluse dans $B(x, \rho)$ donc dans $\mathcal{O}_{i_0}$, en contradiction avec l'hypothèse. Le réel r est appelé *nombre de Lebesgue* du recouvrement.

  Montrons maintenant que E est recouvert par une famille finie $(B(a_k, r))_{k\in\{1,\dots,n\}}$ de boules ouvertes de rayon r. S'il n'en était pas ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$, il existerait $a_{n+1} \in E$ tel que $a_{n+1} \notin \bigcup_{k\in\{1,\dots,n\}} B(a_k, r)$ et par conséquent pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $d(a_{n+1}, a_k) \geq r$. De la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il serait impossible d'extraire une suite convergente, en contradiction avec l'hypothèse.

  Comme chaque boule ouverte $B(a_k, r)$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, est incluse dans un ouvert $\mathcal{O}_k$ du recouvrement, on en déduit enfin que la sous-famille finie $(\mathcal{O}_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ recouvre E.
  Donc (BW) $\Rightarrow$ (BL).

1. C'est cette définition qui est adoptée par le programme de MP pour la notion de *partie compacte* d'un espace vectoriel normé.

En définitive : (BW) $\iff$ (BL).

Grâce à cette équivalence, le théorème de Bolzano-Weierstrass exprime que dans $\mathbb{R}$ (ou dans tout espace vectoriel normé de dimension finie), toute partie fermée et bornée est séquentiellement compacte, donc compacte au sens de Borel-Lebesgue. Comme à l'évidence, une partie séquentiellement compacte est fermée et bornée [2] , il s'agit d'une équivalence.

Une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Sous cette forme, cette équivalence est appelée *théorème de Borel-Lebesgue.*

3. Et les espaces vectoriels normés de dimension infinie ?

On peut légitimement se demander si le théorème de Borel-Lebesgue est encore valable dans un espace vectoriel normé de dimension infinie. La réponse négative est due au mathématicien hongrois *Frigyes Riesz* :

Théorème de Riesz :
Soit E un espace vectoriel normé réel. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) E est de dimension finie.
(ii) Toute partie fermée bornée de E est compacte.
(iii) De toute suite bornée d'éléments de E, on peut extraire une suite convergente.

Nous avons déjà vu que (i) implique (ii), qui équivaut à (iii). Montrons que (ii) implique (i). La boule unité $\overline{B}(0_E, 1)$ est fermée et bornée, donc compacte. Supposons E de dimension infinie.

Démontrons qu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs unitaires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(e_n, F_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$, où $F_0 = \{0_E\}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $F_n = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Construisons les vecteurs e_n par récurrence :

– Pour $n = 1$, on peut choisir n'importe quel vecteur unitaire e_1. On a alors :

$$d(e_1, F_0) = \|e_1\| = 1 \geq \frac{1}{2}$$

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une famille finie $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs unitaires vérifiant pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $d(e_k, F_{k-1}) \geq \frac{1}{2}$. Soit x un élément de E n'appartenant pas à F_n (il en existe puisque E est de dimension infinie). Posons $\delta = d(x, F_n)$. Comme F_n est un sous-espace de dimension finie, il est fermé et par conséquent $\delta > 0$. De plus, δ étant la borne inférieure des distances de x au sous-espace F_n, il existe $y \in F_n$ tel que :

$$\|x - y\| \leq 2\delta \qquad (1).$$

Posons $e_{n+1} = \frac{1}{\|x-y\|}(x - y)$. Alors, $\|e_{n+1}\| = 1$ et pour tout $z \in F_n$:

$$\|z - e_{n+1}\| = \frac{\Big\| \|x - y\|z + y - x \Big\|}{\|x - y\|}.$$

2. Une telle partie A est fermée, puisque si une suite d'éléments de A converge vers ℓ, on peut en extraire une suite qui converge *dans* A ; or une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, donc $\ell \in A$. Elle est bornée, car sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existerait $a_n \in A$ tel que $\|a_n\| \geq n$. De la suite (a_n) il serait impossible d'extraire une suite convergente.

Or, $t = \|x-y\|z + y \in F_n$, donc : $\|t-x\| \geq \delta$. D'où :

$$\|z - e_{n+1}\| \geq \frac{\delta}{\|x-y\|} \geq \frac{1}{2} \quad \text{d'après } (1)$$

On en déduit que $d(e_{n+1}, F_n) \geq \frac{1}{2}$, ce qui achève notre récurrence.

On a ainsi construit une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs unitaires, c'est-à-dire appartenant à la boule fermée $\overline{B}(0_E, 1)$, tels que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, si $p \neq q$ alors $\|e_p - e_q\| \geq \frac{1}{2}$. On ne peut donc extraire de cette suite aucune suite convergente, ce qui contredit la compacité de la boule $\overline{B}(0_E, 1)$.

Ainsi, (ii) implique (i) et les trois propositions sont équivalentes.

Le théorème de Riesz nous montre que le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est valable pour les espaces vectoriels normés qu'en dimension finie.

Conclusion

On retiendra que le théorème de Bolzano-Weierstrass tient une place centrale dans l'ensemble des propriétés de l'ensemble des réels. Il est équivalent au théorème des segments emboîtés, qui équivaut lui-même au fait que $\mathbb{R}$ est *complet*, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy de nombres réels converge. Cette notion n'est malheureusement plus au programme des classes préparatoires. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace métrique E est une *suite de Cauchy* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n \in \mathbb{N}, \ \ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \ \ p \geq q \geq n \ \Rightarrow \ d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$$

L'étude des espaces complets mérite à elle seule un article : [Gou1]

Références

[Sin] Hourya Benis Sinaceur, *Cauchy et Bolzano*, Revue d'Histoire des Sciences (1973).

[Moo] Laurent Moonens, *Bolzano et le théorème des valeurs intermédiaires*, AlmaSoror (2007).

[Seb] Jan Sebestik, *Bolzano Bernard (1781-1848)* , Encyclopædia Universalis.

[Dug] Pierre Dugac, *Histoire des espaces complets*, Revue d'Histoire des Sciences (1984).

[Bur] Jean-François Burnol, *Petit traité pas très compact sur les compacts*, (2009).

[Bag] Julien Baglio, *Compacité et Borel-Lebesgue.*

[Pie] Jean-Paul Pier, *Historique de la notion de compacité*, (1980).

Articles de CultureMATH :

[Gou1] Jean Gounon, *Nombres réels*, CultureMATH.

[Gou2] Jean Gounon, *La construction des Réels par les coupures de Dedekind*, CultureMATH.

Xavier Oudot
`xoudot@club-internet.fr`
professeur agrégé en retraite
28, clos de la vieille rue
78480 Verneuil sur Seine.