BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2019

Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	Série **: STI2D et STL spécialité SPCL**
Durée de l'épreuve : **4 heures**	Coefficient : **4**

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Le candidat doit s'assurer que le sujet distribué est complet.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE n°1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

On rappelle que :

- ln désigne la fonction logarithme népérien.
- i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Pour tout réel a strictement positif, $\frac{\ln(2a)+\ln(8a)}{2}$ est égal à :

a. $\ln(4a)$
b. $\ln(5a)$
c. $\ln(16a)$
d. $\ln(8a^2)$

2. On considère une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.
On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

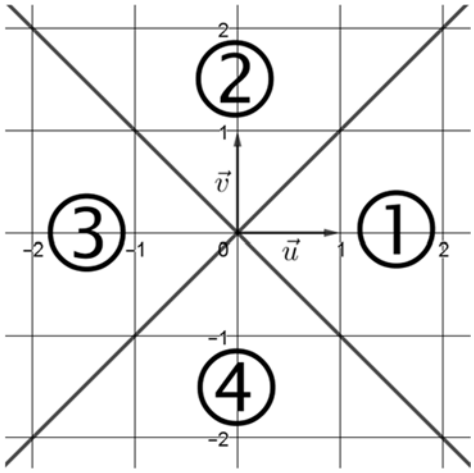
La courbe $\mathcal{C}$ admet :

a. deux asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées,
b. une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées et une asymptote parallèle à l'axe des abscisses,
c. une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées et aucune asymptote parallèle à l'axe des abscisses,
d. deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

3. On considère le nombre complexe $z = -2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
Soit $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z. Une écriture exponentielle de $\overline{z}$ est :

a. $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
b. $2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
c. $2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$
d. $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ partagent le plan en quatre zones ①, ②, ③ et ④ comme indiqué ci-dessous :



Soit z un nombre complexe non nul. On sait que :

- la partie réelle de z est strictement inférieure à sa partie imaginaire ;
- un argument de z est strictement compris entre $\frac{3\pi}{4}$ et 2π.

Le point image de z se situe :

a. dans la zone ①
b. dans la zone ②
c. dans la zone ③
d. dans la zone ④

EXERCICE n°2 (7 points)

L'énergie houlomotrice est obtenue par exploitation de la force des vagues. Il existe différents dispositifs pour produire de l'électricité à partir de cette énergie. Les installations houlomotrices doivent être capables de résister à des conditions extrêmes, ce qui explique que le coût actuel de production d'électricité par énergie houlomotrice est élevé.

On estime qu'en 2018 le coût de production d'un kilowattheure (kWh) par énergie houlomotrice était de 24 centimes d'euros. C'est nettement plus que le coût de production d'un kilowattheure par énergie nucléaire, qui était de 6 centimes d'euros en 2018.

On admet qu'à partir de 2018 les progrès technologiques permettront une baisse de 5% par an du coût de production d'un kilowattheure par énergie houlomotrice.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on note c_n le coût de production, en centime d'euro, d'un kilowattheure d'électricité produite par énergie houlomotrice pour l'année 2018 + n.
Ainsi, $c_0 = 24$.

1. **a.** Calculer c_1. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Déterminer la nature de la suite (c_n) et donner ses éléments caractéristiques.

c. Pour tout entier naturel n, exprimer c_n en fonction de n.

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0{,}95^n < 0{,}25$.

3. Dans cette question, on admet que le coût de production d'un kilowattheure par énergie nucléaire reste constant et égal à 6 centimes d'euros.
Déterminer l'année à partir de laquelle le coût d'un kilowattheure produit par énergie houlomotrice deviendra inférieur au coût d'un kilowattheure produit par énergie nucléaire.

4. Dans cette question, on estime que le coût de production d'un kilowattheure par énergie nucléaire va augmenter tous les ans d'un centime d'euro. On souhaite alors déterminer l'année à partir de laquelle le coût d'un kilowattheure produit par énergie houlomotrice deviendra inférieur au coût d'un kilowattheure produit par énergie nucléaire.

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin que la valeur de la variable N en sortie d'algorithme permette de répondre au problème.

```
C ← 24
D ← 6
N ← 2018
Tant que …………
    C ← ………
    D ← ………
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

b. Répondre au problème posé. Aucune justification n'est demandée.

Partie B

On admet que la durée de vie d'un composant électronique d'une installation houlomotrice, exprimée en année, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle dont le paramètre est $\lambda = 0{,}04$.

1. Déterminer la durée de vie moyenne de ce composant électronique.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 0{,}04\ \mathrm{e}^{-0{,}04x}$.

a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. On rappelle que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$P(X \leq t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Démontrer que $P(X \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}04t}$.

3. a. Calculer $P(X > 15)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-3} .

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE n°3 (6 points)

En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet événement est appelé rentrée atmosphérique.

Le temps, exprimé en jour, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h, exprimée en kilomètre, de son orbite.

Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Étude d'un premier satellite

On admet que la fonction T, associée à ce premier satellite, est une solution de l'équation différentielle (E) suivante dans laquelle y désigne une fonction de la variable h définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

$$(E): \quad 40y' - y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Déterminer la fonction T solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $T(800) = 2\ 000$.

Partie B – Étude d'un deuxième satellite

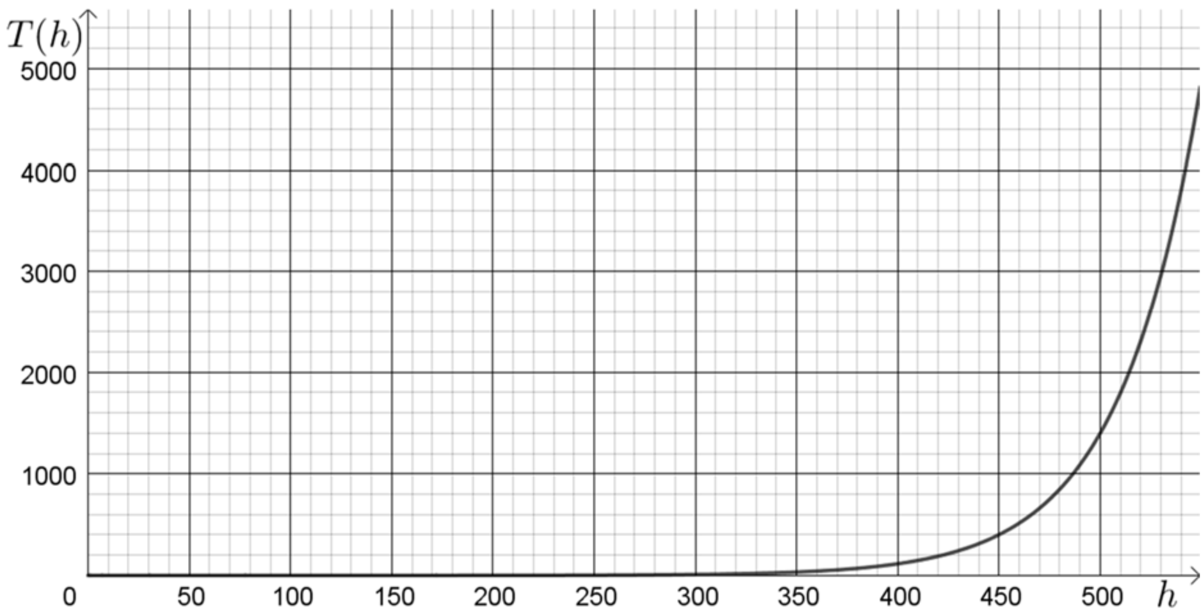
Dans cette partie, on admet que la fonction T, associée à ce deuxième satellite, est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$T(h) = K \times 0{,}012\ \mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}\ .$$

Le nombre réel K est appelé coefficient balistique du satellite.

La fonction T associée à ce deuxième satellite est représentée ci-après.

Dans cette partie, on ne demande pas de justification. Les résultats seront donnés avec la précision permise par le graphique.



1. À quelle altitude minimale faut-il mettre en orbite ce deuxième satellite pour que le temps restant avant sa rentrée atmosphérique soit au moins égal à 1 000 jours ?

2. Déterminer une valeur approchée du coefficient balistique K de ce deuxième satellite.

Partie C – Étude d'un troisième satellite : Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique K égal à 11.
La fonction T, associée à ce troisième satellite, est donc définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$T(h) = 0{,}132\ \mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}\ .$$

1. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude h de 575 km. Calculer le temps $T(h)$ restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble. Arrondir au jour près.

2. Déterminer la limite de T en $+\infty$.

3. **a.** Déterminer $T'(h)$, où T' désigne la fonction dérivée de T.

   b. En déduire le sens de variations de la fonction T sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. On souhaite étudier l'effet d'une augmentation de 10 km de l'altitude h sur le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

   a. Montrer que $T(h+10) = \mathrm{e}^{0{,}25} \times T(h)$.

   b. En déduire qu'augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28% le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

EXERCICE n°4 (3 points)

Un atelier de mécanique de précision est équipé de machines à commande numérique permettant la production de pièces métalliques en aluminium.
Un client passe une commande de pièces dont la longueur souhaitée est de 75 millimètres (mm).

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-2}.

Partie A

Le réglage des machines permet de produire des pièces dont la longueur, exprimée en millimètre, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 75$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}03$.

Afin de garantir au client une précision optimale, seules les pièces dont la longueur est comprise entre 74,95 mm et 75,05 mm sont jugées commercialisables.

1. Déterminer $P(X > 74{,}97)$.

2. Déterminer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit commercialisable.

Partie B

On souhaite améliorer la précision de la production. Pour cela, les machines sont réglées et reprogrammées. Après réglage, la longueur des pièces, en millimètre, est modélisée par une variable aléatoire Y suivant une loi normale. Son espérance est inchangée et vaut $\mu = 75$. La valeur de l'écart-type a été modifiée. On note σ' la nouvelle valeur de l'écart-type.

Ces nouveaux réglages permettent de limiter la proportion de pièces non commercialisables.
On a $P(74{,}95 \leq Y \leq 75{,}05) \approx 0{,}95$.

Déterminer σ'. Justifier.

Partie C

On procède à de nouveaux réglages.
Le responsable de l'atelier affirme alors être en mesure de commercialiser 97% des pièces.
On procède à un contrôle de qualité en prélevant au hasard 300 pièces métalliques. On constate que 14 d'entre elles ne sont pas commercialisables.

Au seuil de 95%, faut-il mettre en doute l'affirmation du responsable de l'atelier ? Justifier la réponse.

On rappelle que lorsque la proportion p dans la population est connue, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est donné par : $\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \ ; \ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$