BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2019

Mathématiques - série ES

Enseignement OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : **3 heures** – coefficient : **5**

Mathématiques - série L

Enseignement de SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **3 heures** – coefficient : **4**

SUJET

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats.

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $u(x) = 3\ln(x) - 2x + 1$.
Soit C_u la courbe représentative de la fonction u dans un repère.

Affirmation 1 : $y = x - 2$ est l'équation réduite de la tangente à C_u au point d'abscisse 1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^2]$ par : $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\ln(x)$.
On admet que la fonction $x \longmapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^2]$.

Affirmation 2 : f est une fonction de densité sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^2]$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3\mathrm{e}^{-2x+1}$.

Affirmation 3 : La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = -6\mathrm{e}^{-2x+1} + 6$ est la primitive de g qui s'annule en $\frac{1}{2}$.

4. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[-8\,;\,-0{,}5]$ par : $h(x) = \frac{4x+1}{x^2}$.

Affirmation 4 : La fonction h est concave sur l'intervalle $[-8\,;\,-0{,}75]$.

Exercice 2 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L.

La Pyrale du buis est une espèce de lépidoptères de la famille des Crambidæ, originaire d'Extrême-Orient. Introduite accidentellement en Europe dans les années 2000, elle y est rapidement devenue invasive. Une étude décomptant le nombre de chenilles de Pyrale dans un camping d'Ardèche donne les estimations suivantes :

Date	01/06/18	02/06/18	03/06/18
n	0	1	2
Nombre de chenilles en centaines	97	181	258

L'exercice étudie et compare deux modélisations de l'évolution du nombre de chenilles.

Partie 1 : *Modèle 1*

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite géométrique (u_n) de raison $q = 1,63$. Ainsi $u_0 = 97$.

1. Calculer u_2. Arrondir à l'unité.
2. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
3. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
4. Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.

Partie 2 : *Modèle 2*

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite (v_n) telle que :

$v_0 = 97$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,91v_n + 93$.

1. On admet que, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{3}(-2809 \times 0,91^n + 3100)$.

   Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.
2. En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$, montrer que la suite (v_n) est croissante.

Partie 3 : *Comparaison des différents modèles*

La valeur relevée dans le camping le 13 juin 2018 est de 745 centaines de chenilles.

1. À partir de ce relevé, quel modèle paraît le plus adapté ?
2. On reprend l'étude du deuxième modèle.

   a) Résoudre l'inéquation : $v_n \geqslant 1000$.

   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$ par :

$$f(x) = 1 + (-4x^2 - 10x + 8)\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

1. On note f' la fonction dérivée de f.
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-4\,;10]$:

$$f'(x) = (2x^2 - 3x - 14)\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

2. Dresser, en justifiant, le tableau des variations de f sur l'intervalle $[-4\,;10]$. On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.

3.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-4\,;-2]$.

b) On considère l'algorithme ci-contre. Recopier et compléter la deuxième ligne du tableau ci-dessous correspondant au deuxième passage dans la boucle.

```
a ← − 4
b ← −2
Tant que (b− a) > 10^(−1)
    m ← (a+b)/2
    p ← f(a) × f(m)
    Si p > 0 alors
        a ← m
    Sinon
        b ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

	m	signe de p	a	b	$b-a$	$b-a>10^{-1}$
Initialisation			-4	-2	2	VRAI
Après le 1er passage dans la boucle	-3	Négatif	-4	-3	1	VRAI
Après le 2ème passage dans la boucle	…	…	…	…	…	…

c) À la fin de l'exécution de l'algorithme, les variables a et b contiennent les valeurs - 3,1875 et - 3,125. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

4. On admet qu'une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;10]$ est la fonction F définie par $F(x) = x + (8x^2 + 52x + 88)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;10]$. Arrondir au centième.

Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats.

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

Partie 1

D'après un sondage sur la fréquence de rejet de produits polluants dans les canalisations, on estime que 72% de la population est respectueuse de son environnement.

On interroge 300 personnes choisies au hasard pour savoir si elles jettent régulièrement des produits polluants dans les canalisations, ce qui permet de repérer les personnes respectueuses de leur environnement. On estime que la population est suffisamment grande pour que ce choix de 300 personnes soit assimilable à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes respectueuses de leur environnement dans un échantillon de 300 personnes choisies au hasard.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité que 190 personnes soient respectueuses de leur environnement. Arrondir à 10^{-4}.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 220 personnes soient respectueuses de leur environnement. Arrondir à 10^{-4}.

Partie 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x^2 - 7x - 4 \geqslant 0$.
2. On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[0\,;\,10]$. Calculer la probabilité que ce nombre soit solution de l'inéquation précédente.

Partie 3

1. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 2,3 et d'écart-type 0,11.
   a) Calculer $P(2{,}18 \leq \mathrm{Z} \leq 2{,}42)$. Arrondir à 10^{-2}.
   b) Calculer $P(\mathrm{Z} \geq 2{,}25)$. Arrondir à 10^{-2}.
2. On suppose maintenant que Z suit une loi normale d'espérance 2,3 et d'écart-type σ.
   Donner une valeur approchée de σ pour que $P(2{,}18 \leqslant Z \leqslant 2{,}42) \approx 0{,}95$. Justifier.