BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

ÉPREUVE DU JEUDI 6 SEPTEMBRE 2018

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 / 9 à 9 / 9

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE n° 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. **Aucune justification n'est demandée.**

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

1. Une forme exponentielle du nombre complexe $-3+\sqrt{3}\,\text{i}$ est :

- **a.** $-2\sqrt{3}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$
- **b.** $2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$
- **c.** $2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$
- **d.** $\sqrt{12}\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$

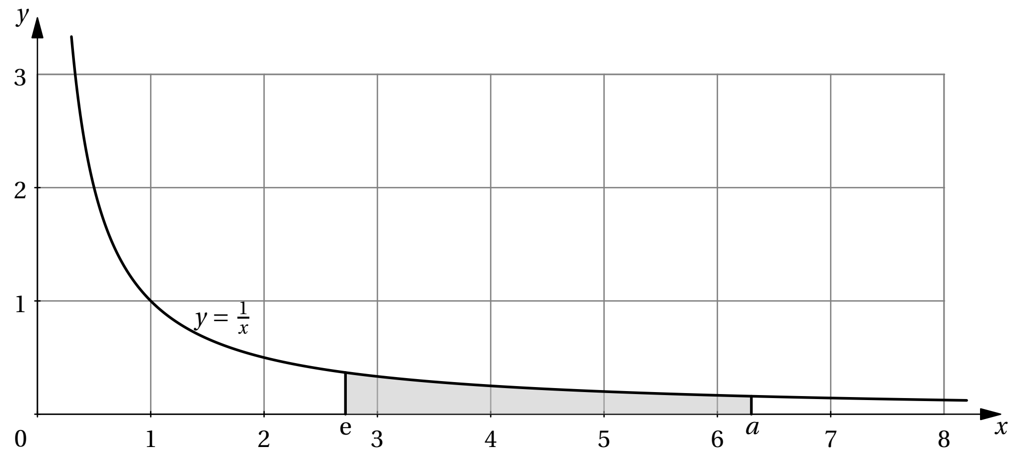
2. On considère le nombre complexe $z=\frac{1}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$. Le nombre z^2 est :

- **a.** un nombre réel
- **b.** un nombre complexe de partie réelle nulle
- **c.** un nombre complexe de module 1
- **d.** un nombre complexe de partie imaginaire positive

3. Une variable aléatoire T suit la loi uniforme sur un intervalle de la forme $[2\,;x]$, où x est un réel strictement supérieur à 2. Sachant que $P(2\leqslant T\leqslant 3)=\frac{1}{4}$, la valeur de x est :

- **a.** 2,25
- **b.** 6
- **c.** 8
- **d.** 10

4. Sur le graphique ci-dessous, la surface grisée est délimitée par la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \mathrm{e}$ et $x = a$, où a est un réel strictement supérieur à e.



La surface grisée a une aire strictement comprise entre 1 et 1,5 unité d'aire lorsque a est égal à :

a. $2\mathrm{e}$

b. $2\mathrm{e}^2$

c. $3\mathrm{e}$

d. e^2

EXERCICE n° 2 (6 points)

Le benzène est un produit chimique liquide utilisé dans la fabrication de matières plastiques.

À la suite d'un incident le 10 juin 2018, une certaine quantité de benzène a été rejetée dans une rivière qui alimente en partie un bassin servant de base nautique. Les autorités sanitaires doivent s'occuper de la dépollution de la rivière tandis que le responsable de la base nautique s'occupe de celle du bassin.

Le benzène flotte à la surface de l'eau. Le responsable de la base nautique prélève un échantillon de liquide selon un protocole établi. Il détermine ainsi la concentration de benzène à la surface du bassin. Celle observée le 10 juin 2018 est de 68 microgrammes par litre. Le tableau suivant classe la qualité de l'eau selon la concentration de benzène, exprimée en microgrammes par litre (μg/L), dans un échantillon prélevé à la surface de l'eau.

Concentration de benzène en μg/L	$[0\,;0,5[$	$[0,5\,;5[$	$[5\,;50[$	$[50\,;5000[$	$\geqslant 5000$
Qualité de l'eau	Excellente	Bonne	Moyenne	Médiocre	Mauvaise

La toxicité du benzène par inhalation conduit le responsable à fermer la base nautique afin de préserver la santé des usagers, cette décision entraînant une perte de recette de 750 euros par jour.

La base nautique pourra rouvrir lorsque la qualité de l'eau sera devenue excellente. Le responsable décide d'étudier deux solutions pour dépolluer le bassin : la première consiste à laisser le benzène s'éliminer sans intervention extérieure et la seconde consiste à filtrer l'eau au charbon actif.

Partie A

Élimination du benzène de façon naturelle

Dans cette partie, le responsable étudie l'évolution de la concentration de benzène à la surface du bassin sans intervention extérieure. Il estime que cette concentration diminue de manière naturelle de 7% par jour, notamment par évaporation.

1. **a.** Quelle est la qualité de l'eau le 10 juin 2018 ?

   b. Quelle serait la qualité de l'eau le 11 juin 2018 ?

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n la concentration de benzène, en microgrammes par litre, à la surface du bassin n jours après le 10 juin 2018.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

   c. Vérifier que le 15 juin 2018, l'eau deviendrait de qualité moyenne.

   d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. **a.** On propose ci-dessous la partie traitement de deux algorithmes.

Algorithme 1	**Algorithme 2**

$u \leftarrow 68$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geqslant 0,5$
  $u \leftarrow 0,93u$
  $n \leftarrow n+1$
Fin Tant que
	$u \leftarrow 68$
	$n \leftarrow 0$
	Tant que $u < 0,5$
	  $u \leftarrow 0,93u$
	  $n \leftarrow n+1$
	Fin Tant que

Quel est celui qui permettrait de déterminer le nombre de jours de fermeture avant que la qualité de l'eau soit devenue excellente ?

b. Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inéquation $68 \times 0,93^n < 0,5$.

Indiquer la démarche utilisée.

c. Interpréter le résultat précédent.

d. En déduire la perte financière qui résulterait de la fermeture de la base si cette solution était retenue.

Partie B

Élimination du benzène par traitement au charbon actif

Un procédé de filtration de l'eau de la base nautique au charbon actif permettrait d'éliminer plus rapidement le benzène présent à la surface du bassin. Le coût total de l'installation est de 20 000 euros.

Dans cette partie, le responsable étudie cette solution. L'action du filtre commencerait alors le 13 juin 2018. À la mise en service, à l'instant $t = 0$, le responsable estime que la concentration de benzène à la surface du bassin serait de 54,7 microgrammes par litre.

Il choisit de modéliser la concentration de benzène en microgrammes par litre à la surface du bassin, en fonction du temps t exprimé en jours, par une fonction f, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$(E)\ \ y' + \frac{1}{4}y = 0$$

1. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle (E).

2. Justifier que, pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = 54,7\mathrm{e}^{-0,25t}$.

3. Quelle serait la qualité de l'eau 19 jours après la mise en service du filtre ?

Partie C

Comparaison des deux solutions étudiées

Laquelle des deux solutions envisagées est financièrement la plus judicieuse pour la base nautique ?

EXERCICE n° 3 (6 points)

Une société d'extraction de gravier reçoit une commande de 550 000 tonnes de gravier pour la construction d'un tronçon d'autoroute. Pour satisfaire cette commande, elle exploite un nouveau gisement de pierre.

Le responsable a recensé les masses journalières de gravier extraites de ce gisement au cours de son exploitation. La tendance observée et son expérience professionnelle le conduisent à modéliser la masse journalière de gravier extraite, exprimée en tonnes, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;600]$ par :

$$f(x) = (0,2x^2 + 30x)\mathrm{e}^{-0,01x}$$

où x désigne le temps écoulé en jours depuis le début de l'exploitation du gisement.

Partie A

1. **a.** Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;600]$,

$$f'(x) = (-0,002x^2 + 0,1x + 30)\mathrm{e}^{-0,01x}$$

   b. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;600]$,

$$f'(x) = 0,002(-x + 150)(x + 100)\mathrm{e}^{-0,01x}$$

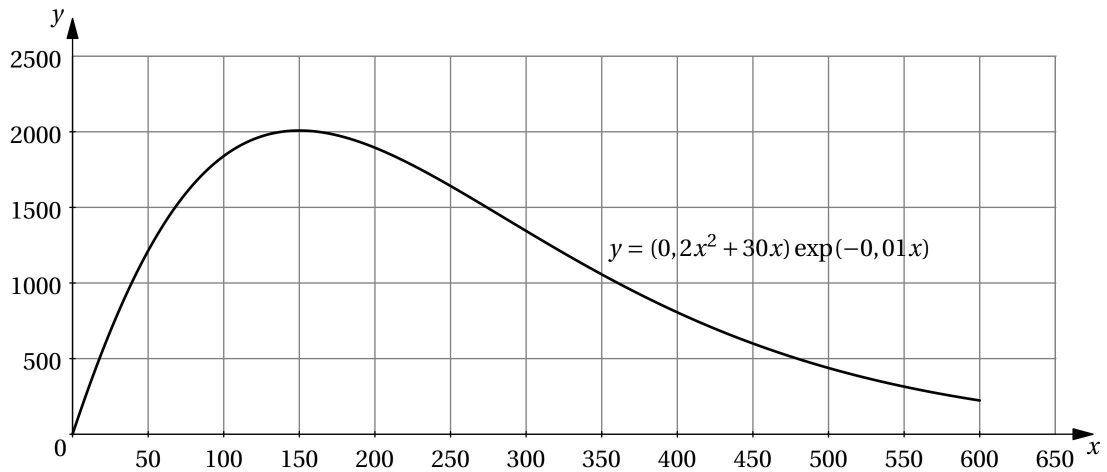
2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;600]$.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;600]$.

   c. En déduire au bout de combien de jours la masse journalière de gravier extraite sera maximale.

   Quelle est alors cette masse maximale, en tonnes ?

3. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous :



Après avoir atteint son maximum, la masse journalière de gravier extraite diminue.

Déterminer graphiquement au bout de combien de jours elle deviendra alors inférieure à 1 000 tonnes.

Répondre avec la précision permise par le graphique.

Partie B

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants :

1	$f(x) = (0,2*x^2 + 30*x)*\exp(-0,01*x)$
	$(0,2x^2 + 30x)\exp(-0,01x)$
2	intégrer $(f(x), x)$
	$(-20x^2 - 7000x - 700000)\exp(-0,01x)$
3	intégrer $(f(x), x, 0, 600)$
	$-12100000\exp(-6) + 700000$
4	approcher(intégrer $(f(x), x, 0, 600)$)
	670007,098662

1. **a.** Que représente le résultat fourni par le logiciel en ligne **2** ?

   b. Une valeur approchée de la masse totale de gravier extraite, en tonnes, entre le début de l'exploitation et le 600^{e} jour d'exploitation est donnée par :

$$I = \int_0^{600} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   La commande pourra-t-elle être satisfaite au bout de 600 jours ?

2. Le responsable du chantier d'extraction estime que la commande sera satisfaite au bout de 400 jours.

   Qu'en pensez-vous ? Justifier la réponse par un calcul.

EXERCICE n° 4 (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Dans cet exercice, sauf mention contraire, on donnera les résultats arrondis à 10^{-3} *près.*

Partie A

1. Lors de la conception d'un avion, les techniciens cherchent à optimiser l'espacement entre les rangées de sièges.
L'espace minimal de confort, exprimé en centimètres, pour les jambes d'un passager adulte peut être modélisé par une variable aléatoire L qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 55$ et d'écart type $\sigma = 5$.
Un passager adulte est choisi au hasard.

   a. Calculer la probabilité que l'espace minimal de confort de ce passager soit compris entre 48 cm et 62 cm.

   b. Calculer la probabilité que l'espace minimal de confort de ce passager soit supérieur à 67 cm.

2. Sur cet avion comportant 334 sièges, les techniciens fixent l'espace entre deux rangées consécutives à 65 cm. La probabilité qu'un client adulte prenne place confortablement est alors égale à $0,977$.
On choisit au hasard un échantillon de 334 personnes adultes pour prendre place dans cet avion. Le nombre de passagers confortablement installés peut être modélisé par une variable aléatoire X.

   a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

   b. Justifier qu'en moyenne, dans un tel avion, 326 personnes pourraient s'asseoir confortablement.

   c. Calculer $P(X \geqslant 330)$. Interpréter le résultat.

Partie B

Par expérience, la compagnie estime que la probabilité qu'un passager ayant réservé une place se présente à l'embarquement est égale à $0,9$.
La compagnie a accepté un nombre n de réservations supérieur ou égal à 335 pour 334 sièges disponibles. On suppose par ailleurs que les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers se présentant effectivement.

Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,9$.

Dans le tableau ci-dessous, on donne, pour quelques valeurs de n supérieures à 335, la probabilité p_n qu'il y ait plus de personnes à l'embarquement que de places disponibles.

	A	B
1	Nombre n de places vendues	p_n
2	353	0,0006
3	354	0,0012
4	355	0,0023
5	356	
6	357	0,0070
7	358	0,0115
8	359	0,0183
9	360	0,0280
10	361	0,0414
11	362	0,0594
12	363	0,0826
13	364	0,1116
14	365	0,1468
15	366	0,1883

1. Indiquer à 10^{-4} près la valeur manquante de la cellule B5 de ce tableau.

2. Combien de billets au maximum la compagnie peut-elle vendre si elle souhaite que le risque d'avoir plus de passagers que de sièges le jour de l'embarquement soit inférieur à 2,5 % ?