# BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

**SESSION 2018**

---

## Série STD2A

**Sciences et Technologies du Design et des Arts Appliqués**

# MATHÉMATIQUES

---

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures

COEFFICIENT **:** 2

**Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.**
**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.**

**Les 2 annexes en pages 7 et 8 sont à rendre avec la copie.**

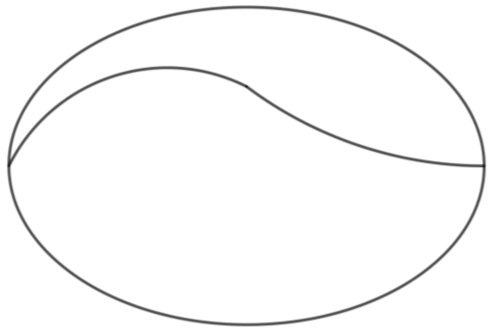
*Le candidat doit traiter les 3 exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*L'usage de la calculatrice est autorisé conformément à la règlementation en vigueur.*

## EXERCICE 1 (8 points)

Un centre de bien-être fait appel à une agence de communication pour créer un logo.
L'agence propose l'esquisse suivante :



L'objectif de cet exercice est d'étudier la construction de ce logo.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$.
La figure de **l'annexe 1, à rendre avec la copie**, sera complétée au fur et à mesure.

### Partie A : Ellipse et arc de cercle

**1. Ellipse**

L'ellipse $\mathcal{E}$ de centre O, de grand axe $(AA')$ et de petit axe $(BB')$ est représentée en **annexe 1 à rendre avec la copie**. Les sommets A, A′, B et B′ de l'ellipse $\mathcal{E}$ ont pour coordonnées $A(6\,;0)$ ; $A'(-6\,;0)$ ; $B(0\,;4)$ et $B'(0\,;-4)$.

**a.** Montrer que $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$ est une équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$.

**b.** Vérifier que le point $F(3\,;\sqrt{12})$ est un point de l'ellipse $\mathcal{E}$.

**c.** Donner une représentation paramétrique de l'ellipse $\mathcal{E}$.

**2. Arc de cercle**

On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de centre $K(-2\,;-2)$ et de rayon GK où G est le point de coordonnées $G(0\,;2)$.

**a.** Montrer que le point $A'$ appartient au cercle $\mathcal{C}$.

**b.** $\overset{\frown}{A'G}$ est l'arc du cercle $\mathcal{C}$ reliant les points $A'$ et $G(0\,;2)$ qui se trouve au-dessus du grand axe de l'ellipse $\mathcal{E}$. Tracer l'arc $\overset{\frown}{A'G}$ sur **l'annexe 1 à rendre avec la copie**.

**c.** Donner une représentation paramétrique du cercle $\mathcal{C}$.

**d.** On considère le point $H(2\,;1)$. Montrer que la droite $(GH)$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point G.

**e.** Déterminer le coefficient directeur de la droite $(GH)$.

**Partie B : Raccordement et courbe**

On souhaite relier le point G au point A par la courbe représentative d'une fonction décroissante sur l'intervalle $[0\,;6]$. $C_f$ est la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;6]$ par : $f(x) = ax^3 + bx + c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels.
Dans cette partie on cherche à déterminer les valeurs de $a$, $b$ et $c$.

**1.** Donner l'expression de $f'(x)$.

**2.** On souhaite que $C_f$ passe par le point G $(0\,;2)$ et que la tangente à $C_f$ en G ait pour coefficient directeur $-0{,}5$. Déduire de ces deux conditions les valeurs de $b$ et $c$.

**3.** Sachant que $C_f$ passe par le point A$(6\,;0)$, déterminer la valeur de $a$.

**4.** Dans cette question, on admet que la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $[0\,;6]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{216}x^3 - \frac{1}{2}x + 2.$$

**a.** Démontrer que $f$ est décroissante sur l'intervalle $[0\,;6]$.

**b.** Calculer $f'(6)$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

**c.** Montrer que l'arc de cercle $\mathcal{C}$ et la courbe $C_f$ ont la même tangente au point G.
*On pourra utiliser les résultats de la* **Partie A** *question* **2.**

**d.** Compléter le tableau de valeurs de **l'annexe 1 à rendre avec la copie**.
*On arrondira les résultats au dixième.*

**e.** Compléter la figure de **l'annexe 1 à rendre avec la copie** par le tracé de la courbe $C_f$.

**EXERCICE 2 (5 points)**

**Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).**
Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses proposées est correcte**. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

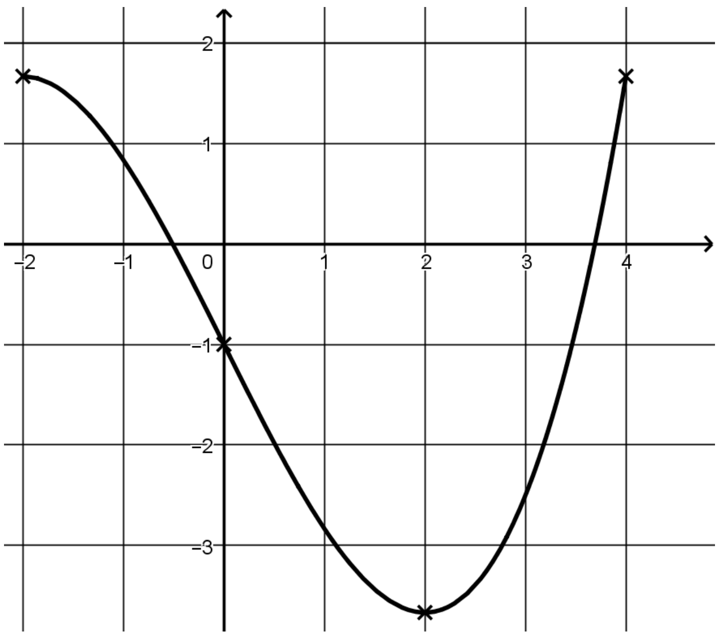
**1.** Pour tout nombre réel $x$, $\log\left(\frac{10^x}{5}\right)$ est égal à :

- $\frac{x}{5}$
- $x - \log(5)$
- $x\log(2)$
- $\log(x) + 2$

**2.** $\frac{1}{243}$ est solution de l'équation $3x^a = 1$ donc $a$ vaut :

- $0$
- $1{,}5$
- $5$
- $\frac{1}{5}$

**3.** La courbe représentative d'une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$ est donnée ci-dessous.




Alors :

- $f'(x) \geq 0$ sur $[-2\,;-1]$
- $f'(0) > 0$
- $f'(x) \leq 0$ sur $[-2\,;\,2]$
- $f'(3) < 0$

**4.** ABC est un triangle tel que $\mathrm{AB} = 2$ ; $\mathrm{AC} = 4$ et $\widehat{\mathrm{BAC}} = 60°$. La distance BC est égale à :

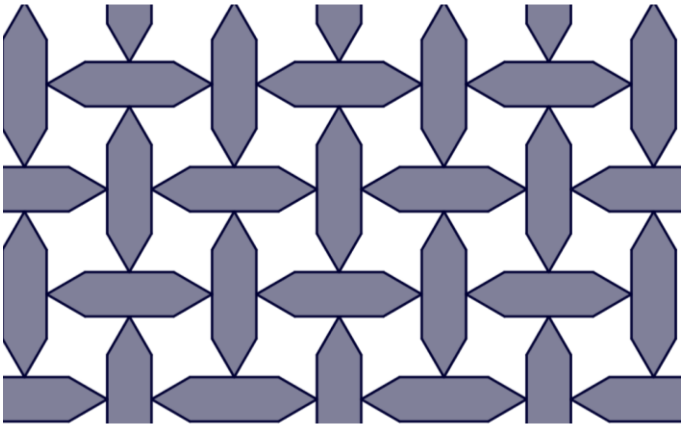
- $3$
- $3{,}5$
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{12}$

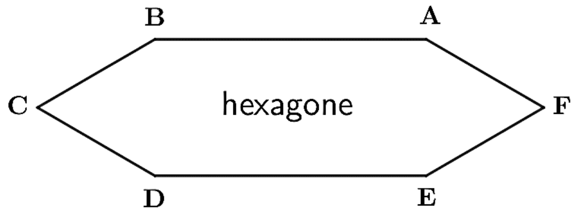
**5.** $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace dans lequel les points E, F et G ont pour coordonnées : $\mathrm{E}(1\,;0\,;0)$, $\mathrm{F}(0\,;2\,;0)$ et $\mathrm{G}(0\,;0\,;1)$. On a :

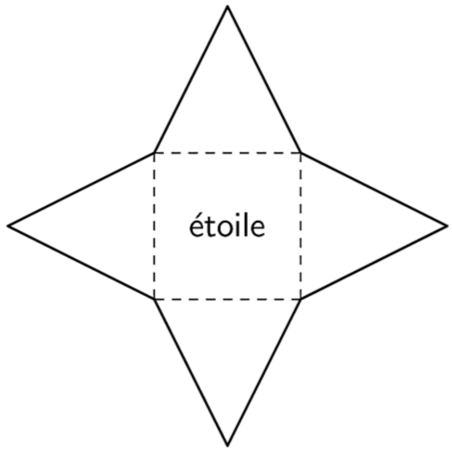
- $\overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EG}} = 1$
- $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ sont orthogonaux
- $\mathrm{EF} = \mathrm{EG}$
- $\mathrm{EF} = 2\mathrm{EG}$

## EXERCICE 3 (7 points)

Le pavage représenté ci-dessous à gauche a été réalisé à l'aide des deux motifs « hexagone » et « étoile » représentés ci-dessous à droite.






### Partie A : Les motifs

**1.** L'hexagone ABCDEF est constitué d'un rectangle ABDE tel que $AB = 4$ cm et $BD = 2$ cm.
Les triangles AEF et BCD sont équilatéraux et situés à l'extérieur du rectangle ABDE.
Déterminer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CDE}$.

**2.** L'étoile est constituée d'un carré et de triangles équilatéraux dont les côtés mesurent $2$ cm.
Justifier qu'il ne reste pas d'espace vide lorsque l'on place des hexagones identiques à l'hexagone ABCDEF autour de cette étoile comme dans le pavage représenté ci-dessus à gauche.

### Partie B : Étude du pavage

*On représentera, sur* **l'annexe 2 à rendre avec la copie**, *les points et les vecteurs permettant de définir les transformations du plan utilisées dans les questions de cette partie.*

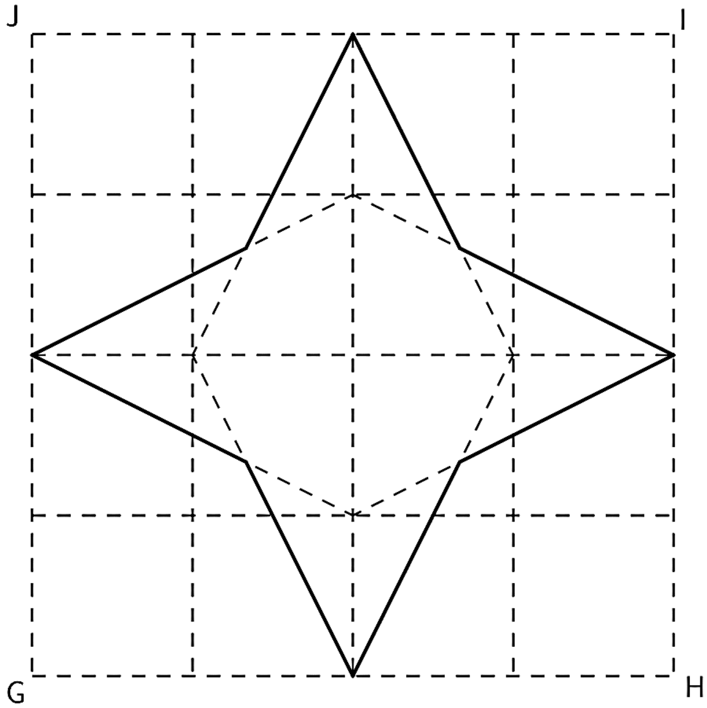
**1.** Donner une transformation du plan qui permet de passer du motif « hexagone » numéroté $1$ au motif « hexagone » numéroté $2$ ?

**2.** On peut passer du motif « hexagone » numéroté $1$ au motif « hexagone » numéroté $3$ en appliquant successivement deux transformations du plan. Quelles sont ces transformations ?

**3.** Par quelle transformation du plan passe-t-on du motif « étoile » numéroté $4$ au motif « étoile » numéroté $5$ ?

**Partie C : Construction d'une autre étoile en perspective centrale**

L'étoile représentée ci-dessous est inscrite dans un carré $\mathrm{GHIJ}$ situé dans un plan horizontal.
Cette étoile est construite à partir du quadrillage régulier représenté en pointillés dans la figure ci-dessous. Cette étoile est différente de celle du motif « étoile ».




Dans **l'annexe 2 à rendre avec la copie**, on a commencé à représenter en perspective centrale le carré $\mathrm{GHIJ}$. Les points $g$, $h$, $i$ … représentent respectivement les points G, H, I…

*On complétera au fur et à mesure la représentation de la figure sur* **l'annexe 2 à rendre avec la copie**. *On laissera apparents les traits de construction.*

**1.** Le segment $[\mathrm{GH}]$ se situe dans un plan frontal. Construire le point de fuite principal $w$.

**2.** Les droites $(\mathrm{HI})$ et $(\mathrm{GJ})$ sont parallèles. Que peut-on en déduire pour les droites $(hi)$ et $(gj)$ qui les représentent dans la représentation en perspective centrale ?

Placer le point $j$.

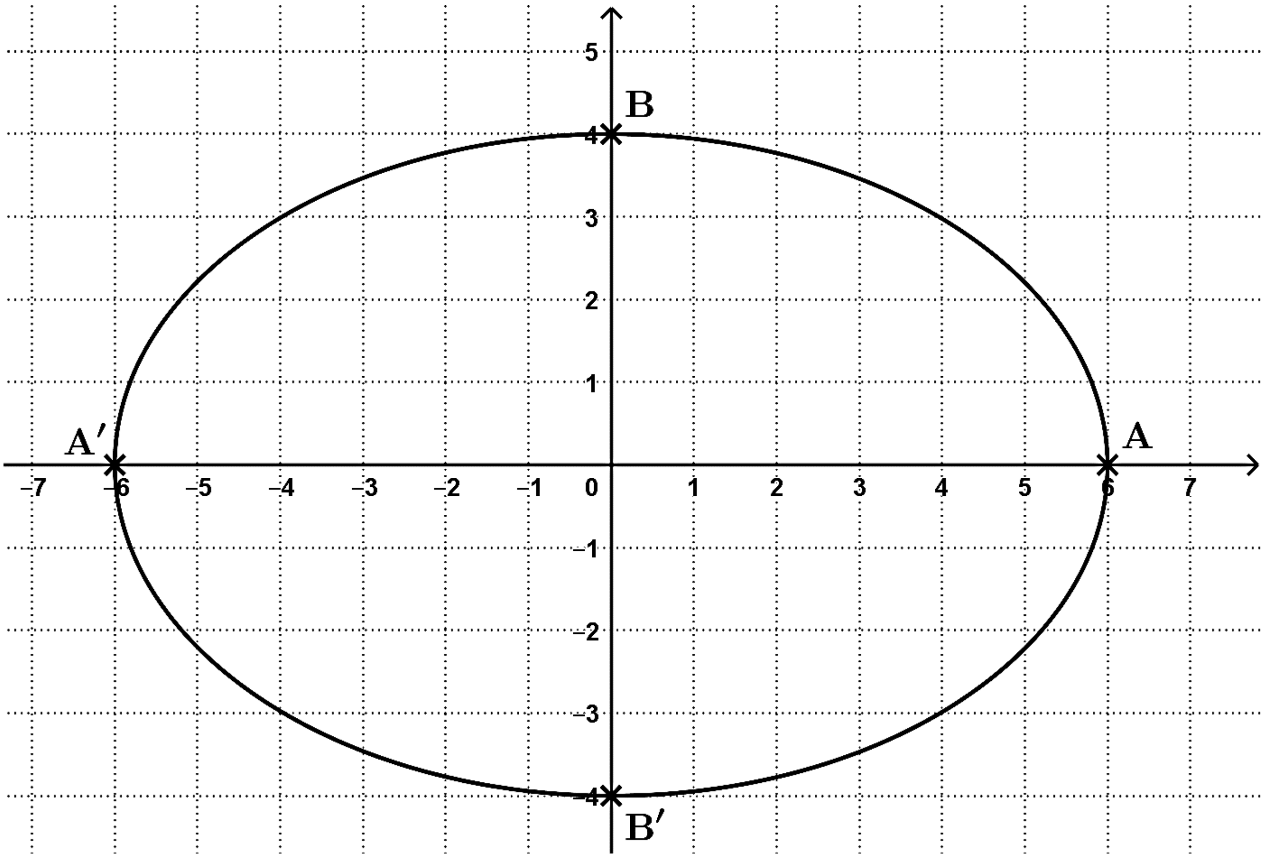
**3.** On appelle $\mathrm{M}$ le centre du carré $\mathrm{GHIJ}$. Construire l'image $m$ du point $\mathrm{M}$.

**4.** Construire l'image du quadrillage régulier du carré $\mathrm{GHIJ}$.

**5.** Représenter l'étoile. *On repassera en couleur le contour de l'étoile.*

## Annexe 1 à rendre avec la copie

### EXERCICE 1

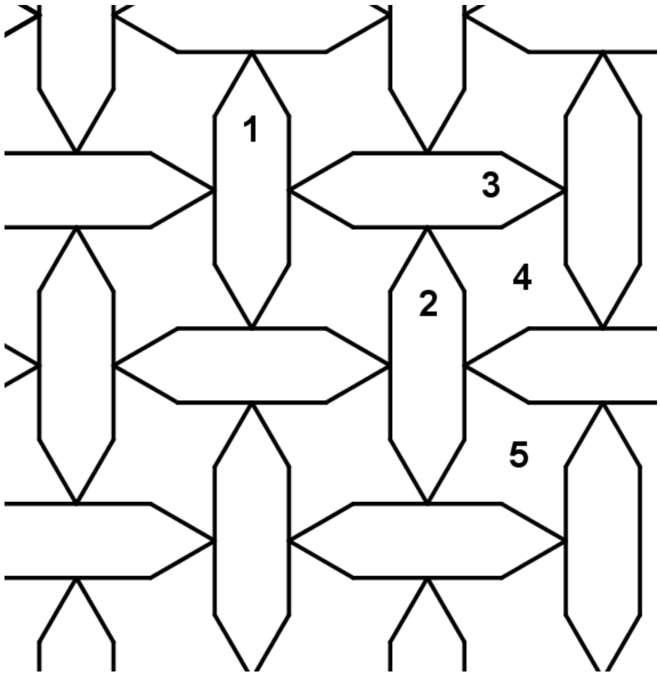



### EXERCICE 1 – Partie B - 4.d.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

## Annexe 2 à rendre avec la copie

### EXERCICE 3 – Partie B




### EXERCICE 3 – Partie C