B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6 ;

l'annexe page 6 est à rendre avec la copie.

obligatoire

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 *points*)

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si besoin, à 10^{-3}.

Partie A

Elsa a préparé un grand saladier de billes de chocolat pour son anniversaire.
On y trouve :

- 40 % de billes au chocolat blanc, les autres étant au chocolat noir ;
- parmi les billes au chocolat blanc, 60 % sont fourrées au café ; les autres sont fourrées au praliné ;
- parmi les billes au chocolat noir, 70 % sont fourrées au café ; les autres sont fourrées au praliné.

Un invité prend une bille de chocolat au hasard dans le saladier.
On définit les événements suivants :

- B : « l'invité prend une bille au chocolat blanc » ;
- C : « l'invité prend une bille fourrée au café ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Montrer que la probabilité que l'invité prenne une bille fourrée au café vaut 0,66.
3. Sachant que la bille est fourrée au café, quelle est la probabilité que l'invité ait pris une bille au chocolat blanc ?

Partie B

La société Chococéan commercialise des bonbons au chocolat, qui sont conditionnés en paquets d'environ 250 g par une machine. La réglementation exige qu'un tel paquet de bonbons au chocolat ait une masse supérieure à 247,5 g.
La dirigeante de l'entreprise constate que, lorsqu'on prélève au hasard un paquet de bonbons au chocolat dans la production, sa masse, en grammes, peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 qui suit une loi normale d'espérance $\mu_1 = 251$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

1. Calculer la probabilité qu'un paquet prélevé au hasard dans la production soit conforme à la réglementation.
2. La dirigeante souhaiterait que 98 % des paquets soient conformes à la réglementation. Cela nécessite un nouveau réglage de la machine, afin que la masse, en grammes, du paquet prélevé au hasard soit modélisée par une variable aléatoire X_2 qui suit une loi normale d'espérance μ_2 inconnue et d'écart-type $\sigma = 2$.
   Déterminer la valeur de μ_2 répondant au souhait de la dirigeante.

Partie C

La société procède à un réglage de la machine. La dirigeante affirme que désormais 98 % des paquets produits sont conformes à la réglementation.
Une association de consommateurs fait peser 256 paquets de bonbons au chocolat et en dénombre 248 qui sont conformes à la réglementation.
Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de la dirigeante ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (6 *points*)

Commun à tous les candidats

On note **R** l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit f_2 la fonction définie sur **R** par $f_2(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$. La courbe représentative de f_2, notée $\mathscr{C}_2$, est tracée dans un repère orthonormé sur l'**ANNEXE** à rendre avec la copie.

Aucune justification ni aucun calcul ne sont attendus dans cette partie.

1. Conjecturer les limites de f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Conjecturer le tableau de variations de f_2 à l'aide du graphique.
3. Soit T_2 la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente sur l'**ANNEXE** à rendre avec la copie, puis en conjecturer une équation par lecture graphique.
4. Sur l'**ANNEXE** à rendre avec la copie, hachurer un domaine dont l'aire est donnée par l'intégrale
$$\int_{-2}^{6} f_2\,(t)\mathrm{d}t.$$

Partie B

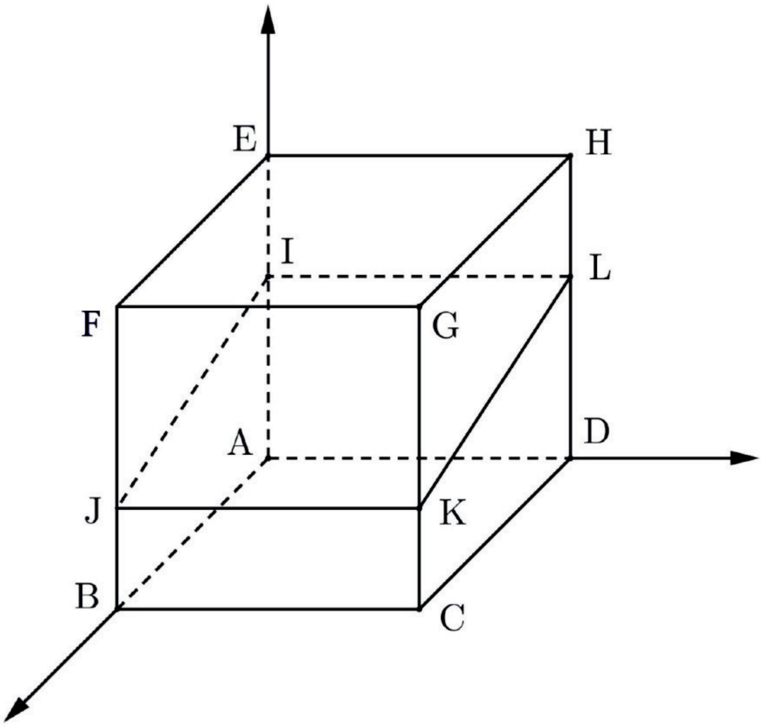
Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur **R** par $f_m(x) = (x+m)\mathrm{e}^{-x}$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On admet que f_m est dérivable sur **R** et on note f_m' sa dérivée.
Montrer que, pour tout réel x, $f_m'(x) = (-x-m+1)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de f_m sur **R**.
4.
   a. Pour tout réel m, on note T_m la tangente à la courbe $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0. Démontrer que T_m a pour équation réduite $y = (1-m)x + m$.
   b. Démontrer que toutes les droites T_m passent par un même point dont on précisera les coordonnées.
5. Étudier le signe de $f_m(x)$ pour tout réel x.
6. On admet que la fonction F_2 définie sur **R** par $F_2(x) = -(x+3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f_2 sur **R.**
   a. Déterminer, en fonction de x, l'expression de
   $$\int_{-2}^{x} f_2\,(t)\mathrm{d}t.$$
   b. En déduire la valeur de
   $$\lim_{x\to+\infty} \int_{-2}^{x} f_2\,(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 (4 *points*)

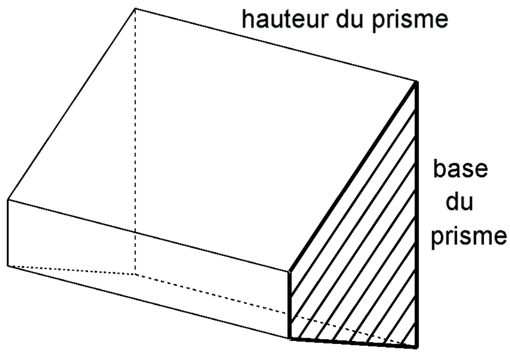
Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH. L'espace est rapporté au repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
La figure est donnée ci-dessous.



On rappelle les formules suivantes :

Aire d'un trapèze : $\frac{1}{2}$ (petite base + grande base)$\times$ hauteur Volume d'un prisme : aire de la base $\times$ hauteur



On note $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $4x + 15z - 9 = 0$.
La section IJKL du cube ABCDEFGH par le plan $\mathcal{P}_1$ est représentée sur la figure.

1. Déterminer les coordonnées des points I et J.
2. Le plan $\mathcal{P}_1$ partage le cube en deux prismes.
   Calculer le volume de chacun de ces deux prismes.
3. Soit M un point du segment [EI].
   On cherche un plan $\mathcal{P}_2$ parallèle à $\mathcal{P}_1$ et passant par M qui partage le cube en deux prismes de même volume.
   Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$.

Exercice 4 (5 *points*)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$1 \leq u_n \leq \mathrm{e}^2$$

2.
- **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- **b.** En déduire la convergence de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose
$$v_n = \ln(u_n) - 2$$
- **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- **b.** Démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$$
- **c.** En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
- **d.** Calculer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq \mathrm{e}^2$. »
Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2