BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2018

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DU DESIGN ET DES ARTS APPLIQUÉS

STD2A

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 2

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte dix pages numérotées de 1 à 10.

Les annexes situées en pages 7, 8, 9 et 10 sont à compléter et à rendre avec la copie.

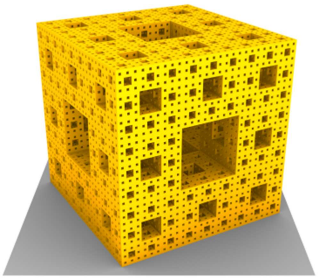
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront dans l'appréciation des copies.

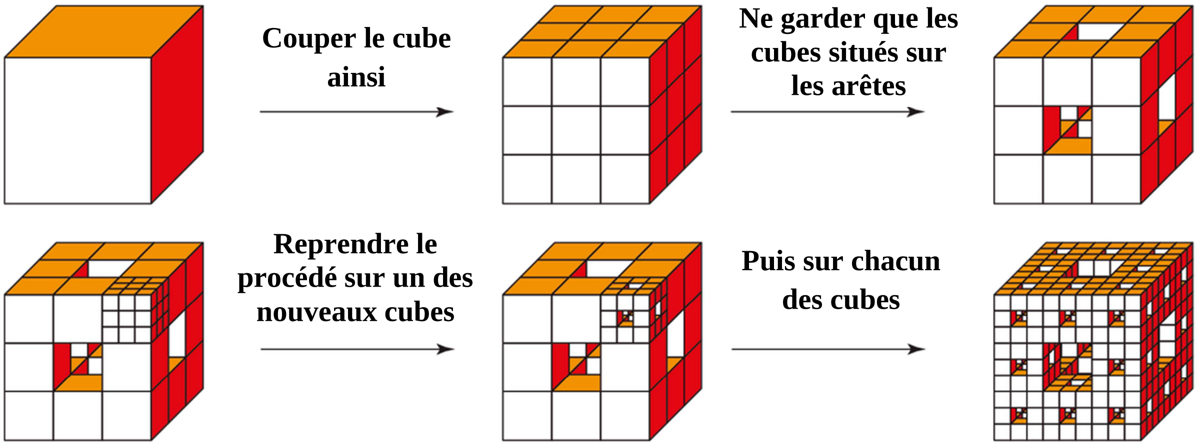
L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

EXERCICE 1 *(5 points)*

L'éponge de Menger est un « solide fractal ».



Sa construction peut être décrite de la manière suivante :



D'après l'IREM de Paris-Nord

Le solide obtenu à la limite, après un nombre infini d'itérations, est l'éponge de Menger.

On s'intéressera uniquement à la première itération de l'éponge de Menger, représentée ci-contre en perspective parallèle et appelée (M) par la suite.

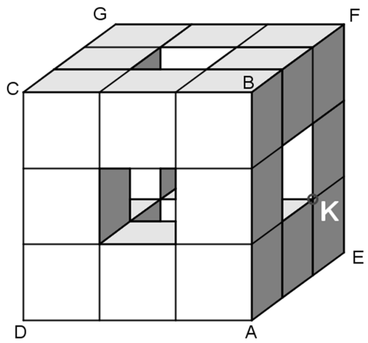


Figure 1

Partie A : Perspective centrale

L'annexe 1-A (page 7) donne le début de la représentation de (M) en perspective centrale. On sait de plus que l'arête [AB] est frontale.

On conviendra de noter un point de l'espace avec une lettre majuscule et de noter son image dans une perspective centrale avec une lettre minuscule (ainsi a est l'image du point A, b l'image de B ...)

On réalisera sur l'annexe 1-A les constructions demandées ci-dessous.

1. Construire les points de fuite associés aux directions (BC) et (BF).
2. Poursuivre la représentation du cube en perspective centrale.
3. Construire le point k, image du point K (voir Figure 1 ci-dessus, face ABFE). *Laisser les traits de construction apparents.*
4. Terminer la construction de (M) et repasser en traits forts les éléments visibles. *On ne représentera pas les arêtes cachées mais on prendra le soin de représenter les arêtes intérieures visibles.*

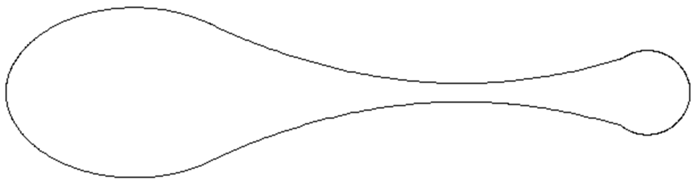
Partie B : Ombre portée

L'annexe 1-B (page 7) donne la représentation en perspective parallèle du solide (M) posé sur le sol. On appelle P le centre de la face supérieure. On a fixé une source lumineuse S, située à la verticale du point P et à une hauteur égale au double de la hauteur du cube initial. Pour fixer S on a dû obstruer la face supérieure de (M).

1. Justifier que les points A, B, P et S appartiennent à un même plan.
2. Construire sur cette annexe l'ombre portée de (M), en laissant les traits de construction apparents.

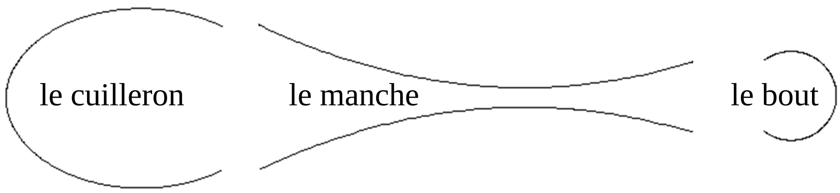
<u>**EXERCICE 2**</u> *(9 points)*

Un designer de l'entreprise « Couverts de France » veut lancer une nouvelle cuillère dont un croquis est donné ci-dessous. Sa longueur réelle est de 16 cm.



L'objet de l'exercice est d'étudier une modélisation mathématique de la forme de cette cuillère.

Cette cuillère peut être décomposée en trois parties :



Ces différentes parties peuvent être modélisées :
- le cuilleron, par un arc d'ellipse,
- le manche, par la courbe représentative d'une fonction *f* et son image par symétrie par rapport à un axe horizontal,
- le bout, par un arc de cercle.

Sur l'annexe 2 (page 8) sont représentés, dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm, les points de coordonnées suivantes : A(4,8 ; 1,6), B(14,4 ; 0,8), I(15 ; 0) et T(16,4 ; 2,3).

Partie A : Le bout

1. Tracer sur l'annexe 2 le cercle (C) de centre I et de rayon IB.
2. Calculer la longueur IB. En déduire l'équation cartésienne réduite du cercle (C).
3. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux. Que peut-on en déduire pour la droite (BT) par rapport au cercle (C) ?
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (BT).

Partie B : Le cuilleron

1. Quel est l'ensemble (E) des points M de coordonnées (x ; y) vérifiant l'équation $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$?
   Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Déterminer les coordonnées des points de (E) dont l'abscisse vaut 4,8.

3. Tracer l'ensemble (E) dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ de l'annexe 2.

Partie C : Le manche

Le profil du manche peut être modélisé par la courbe représentative C_f de la fonction f définie sur l'intervalle [4,8 ; 14,4] par l'expression : $f(x)=\frac{1}{25}x^2-\frac{1277}{1500}x+\frac{2978}{625}$.

1. Montrer que les points A(4,8 ; 1,6) et B(14,4 ; 0,8) sont des points de C_f.

2. Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f.

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [4,8 ; 14,4].
   On dressera le tableau de variations en donnant si nécessaire des valeurs arrondies à 10^{-2} près.

4. Recopier et compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous :

x	4,8	6	7	8	9	10	11	12	13	14,4
$f(x)$	1,6									0,8

5. Tracer sur l'annexe 2 la courbe représentative C_f de la fonction f sur [4,8 ; 14,4] , puis la courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

6. On s'intéresse au raccordement entre le manche et le bout de la cuillère.
   a) Comparer les coefficients directeurs des tangentes à C_f et à (C) au point B.
   b) Que peut-on en conclure quant au raccord de la courbe C_f et du cercle (C) ?

7. Déterminer la largeur du manche à son endroit le plus étroit. On en donnera la valeur arrondie au dixième de millimètre près.

EXERCICE 3 *(6 points)*

L'objectif de cet exercice est d'étudier différents carrelages à partir de la même forme d'un carreau élémentaire.

Partie A : Construction du carreau élémentaire

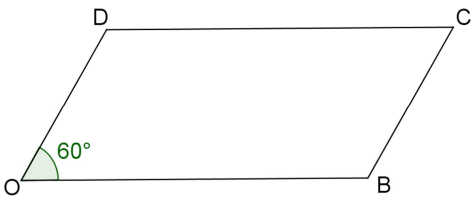
Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ donné en annexe 3-A (page 9), effectuer le programme de construction suivant :

a. Placer le point B de coordonnées (2 ; 0).
b. Placer le point B′ image du point B par la rotation de centre O, d'angle 60° et de sens anti-horaire.
c. Placer le point D, milieu du segment [OB′].
d. Construire le point C tel que OBCD soit un parallélogramme.
e. Construire l'image du parallélogramme OBCD par la rotation de centre O, d'angle 60° et de sens anti-horaire.

Partie B : Pavage uni

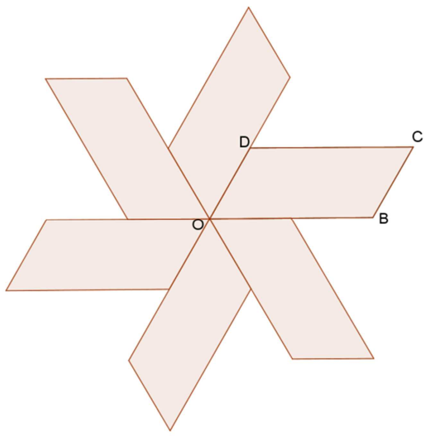
On considère le parallélogramme OBCD ci-contre.

On sait que OB = 2×OD et $\widehat{BOD} = 60°$.



On souhaite paver une surface à l'aide du carreau élémentaire OBCD.

On considère le motif ci-contre :

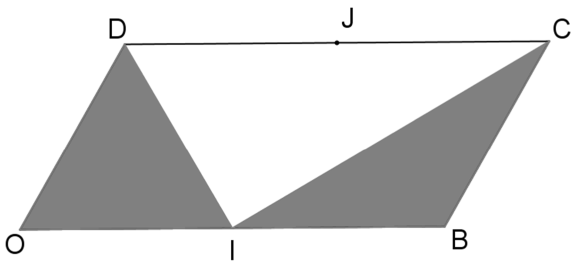


1. Par quelles transformations peut-on obtenir ce motif à partir du parallélogramme OBCD précédent ?

2. À partir du motif ci-dessus, par quelles transformations peut-on obtenir le pavage représenté en annexe 3-B (page 9) ? En préciser les éléments caractéristiques. *À cette fin, on pourra placer et nommer des points sur l'annexe 3-B.*

Partie C : Pavage bicolore

Le carreleur ne souhaite pas avoir un carrelage uni. On colore le carreau élémentaire de la façon suivante, I et J étant les milieux respectifs des segments [OB] et [CD].

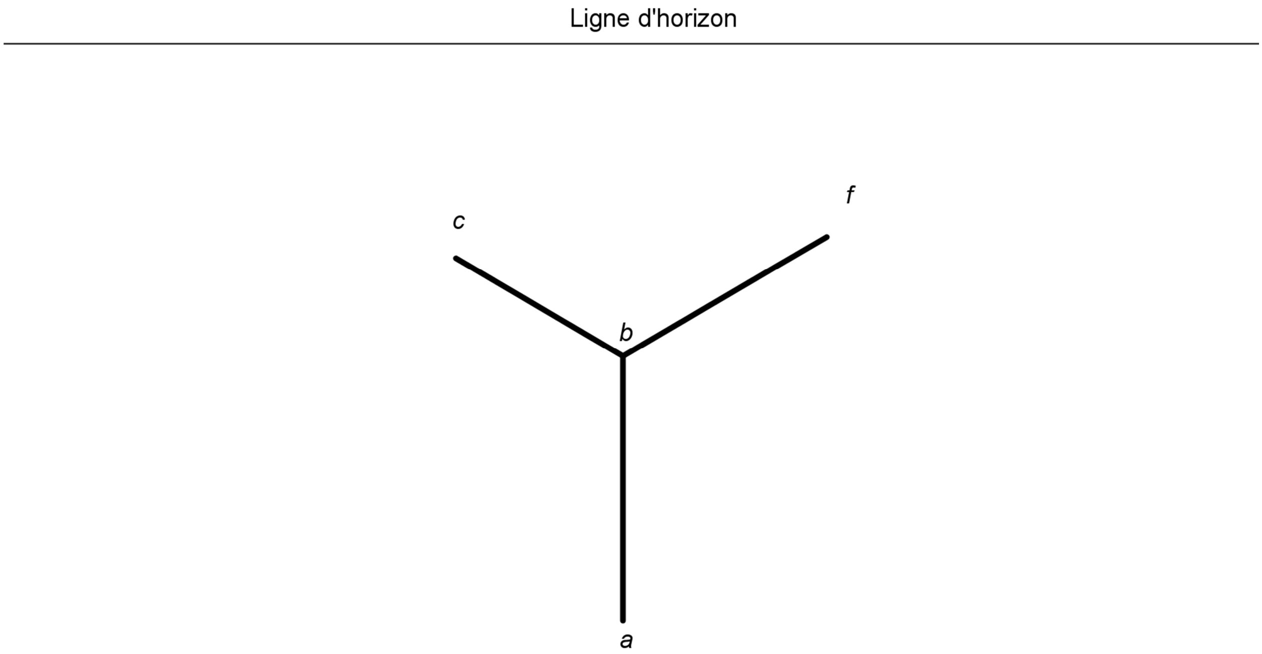


1. Déterminer la proportion de la zone colorée du carreau. Justifier.

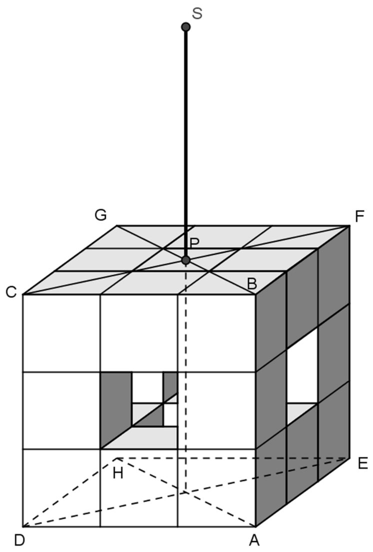
2. Colorier le pavage de l'annexe 3-C (page 10) selon la manière décrite ci-dessus pour le carreau élémentaire.
   Quelles figures géométriques ressortent alors du pavage après ce coloriage ?

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

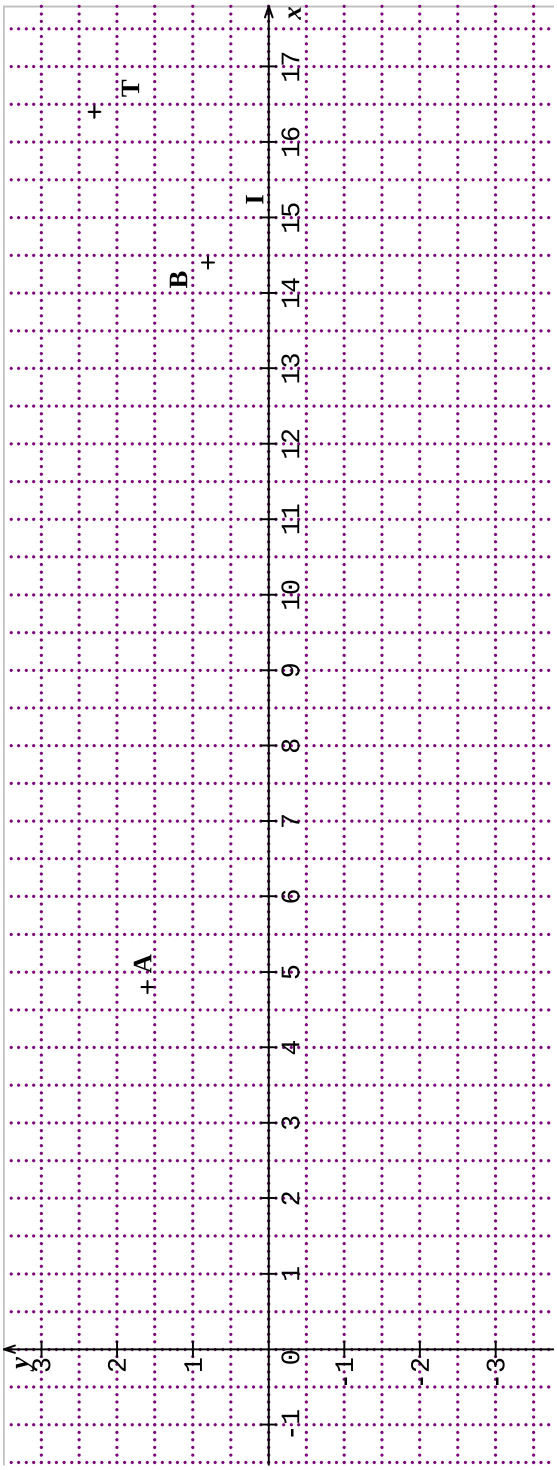
Annexe1.A



Annexe1.B

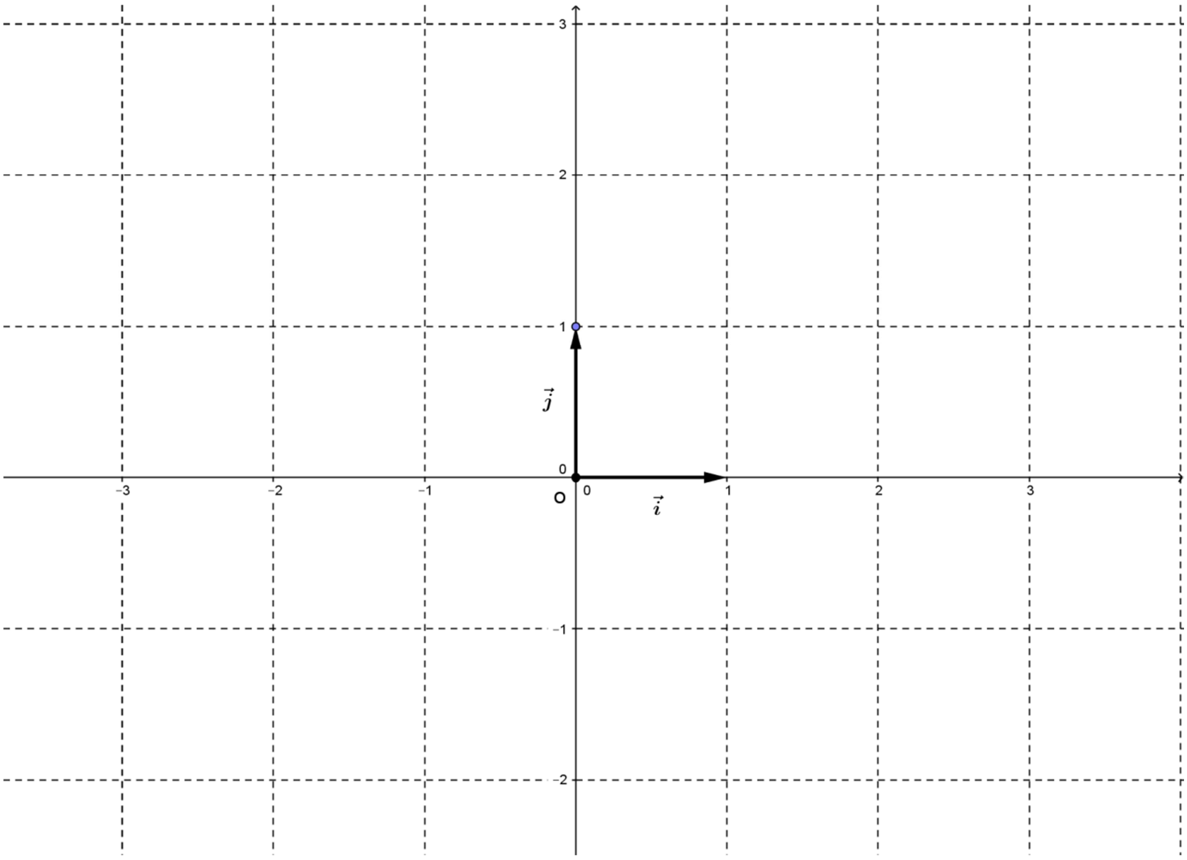


Annexe 2 (à rendre avec la copie)

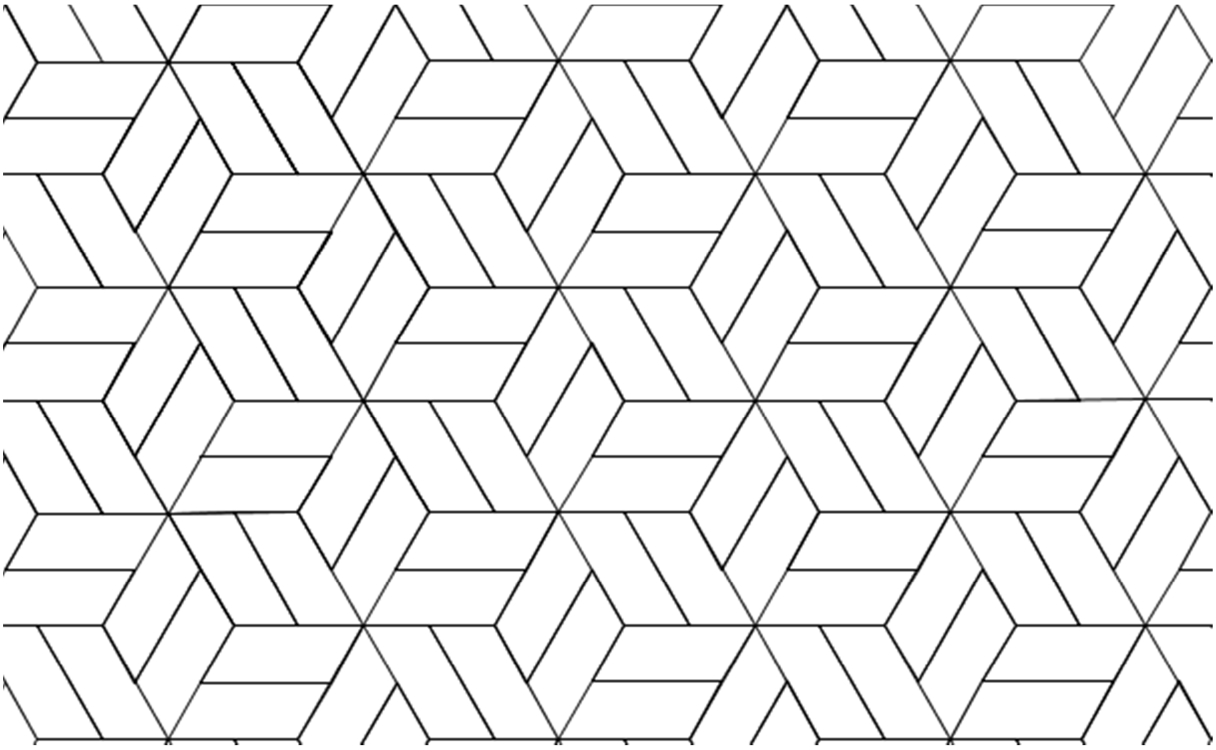


Annexe 3 (à rendre avec la copie)

Annexe 3-A



Annexe 3-B



Annexe 3 suite (à rendre avec la copie)

Annexe 3-C : pavage bicolore