1010101...

Question

Parmi les nombres 101, 10101, 1010101, 101010101, etc., lesquels sont premiers ?

Réponse

101 est premier, mais nous allons montrer que les suivants ne le sont pas.

En effet, le nombre avec p zéros est

$$N(p) = \sum_{i=1}^{p} 100^i = \frac{100^{p+1} - 1}{99}.$$

Or,

$$100^{p+1} - 1 = (10^{p+1})^2 - 1 = (10^{p+1} - 1) \times (10^{p+1} + 1),$$

donc

$$N(p) = \frac{(10^{p+1} - 1) \times (10^{p+1} + 1)}{99}.$$

Le nombre $10^{p+1} - 1 = \underbrace{999\dots999}_{p+1 \text{ chiffres}}$ est toujours divisible par 9. Comme 11 est un nombre premier, il divise au moins l'un des deux facteurs $10^{p+1} \pm 1$, d'après le lemme d'Euclide.

Ainsi, dès que $p \geqslant 2$, les deux facteurs $10^{p+1} - 1 \geqslant 999$ et $10^{p+1} + 1 \geqslant 1001$ sont supérieurs à 99, donc on obtient une factorisation non triviale qui peut être de l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{10^{p+1} - 1}{99} \times (10^{p+1} + 1), \text{ ou } \frac{10^{p+1} - 1}{9} \times \frac{10^{p+1} + 1}{11}.$$