Score impossible

Question

Dans un certain sport, les actions peuvent rapporter 6, 9 ou 20 points. Quel est le plus grand score qui soit impossible à atteindre ?

Réponse

Commençons par déterminer les nombres de points que l'on peut obtenir en n'exécutant que les actions qui rapportent 6 et 9 points. Puisque $6 = 3 \times 2$ et $9 = 3 \times 3$, il est déjà clair que l'on n'obtiendra de la sorte que des multiples de 3.

Mais on peut dire mieux. Pour cela, démontrons un résultat intermédiaire.

Lemme. Tout nombre entier $\geqslant 2$ peut s'écrire sous la forme $a \times 2 + b \times 3$.

Preuve. La preuve de ce résultat est très simple, mais repose sur un principe qui nous resservira, que l'on va appeler le *principe des scores consécutifs*. Le point-clef est que 2 et 3 sont deux entiers consécutifs pouvant s'écrire sous la forme demandée (de façon tautologique, dans leur cas). En ajoutant 2, on obtient qu'il en va alors de même de 4 et 5. En rajoutant 2, de 6 et 7, et ainsi de suite pour tous les entiers successifs : comme 2 est dans la liste des scores autorisés, il suffit de trouver 2 scores consécutifs pour obtenir tous les scores supérieurs.

On a donc résolu notre question intermédiaire : les scores (strictement positifs) possibles à partir d'actions valant 6 et 9 points sont exactement les scores de la forme $3 \times n$, où n est un entier $\geqslant 2$.

Que se passe-t-il si l'on s'autorise maintenant l'action à 20 points ? Comme 6 et 9 sont toujours des multiples de 3, il va falloir utiliser l'action à 20 points pour obtenir des scores qui ne sont pas multiples de 3. Plus précisément, comme $20 = 3 \times 6 + 2$ et $40 = 3 \times 13 + 1$, il va falloir au moins effectuer cette action une fois pour obtenir des scores de la forme $3k + 2$ et au moins deux fois pour obtenir des scores de la forme $3k + 1$. Cela démontre déjà que tous les scores de la forme $3k + 1$ inférieurs à 40 sont impossibles (le dernier est $37 = 3 \times 12 + 1$) et même que 43 est impossible, car il faudrait pour l'obtenir marquer deux fois 20 points, mais il est alors impossible de marquer les trois points manquants.

Pour vérifier que les nombres supérieurs à 43 sont des scores possibles, on peut alors adopter plusieurs stratégies :

— On peut utiliser le principe des scores consécutifs, d'après lequel il suffit de trouver 6 scores possibles consécutifs pour être sûr de pouvoir obtenir tous les scores suivants. Il est alors facile de démontrer que les entiers de 44 à 49 sont effectivement des scores possibles, par exemple avec les décompositions suivantes :

$$44 = 20 + 6 \times 4, \qquad 45 = 9 \times 5, \qquad 46 = 20 \times 2 + 6$$
$$47 = 20 + 9 \times 3, \qquad 48 = 6 \times 8, \qquad 49 = 20 \times 2 + 9.$$

— On peut également faire une disjonction de cas suivant le reste de la division du nombre par 3.

1. Pour un nombre $\geqslant 6$ multiple de 3, on a vu au début du raisonnement que l'on pouvait obtenir un tel score uniquement avec les actions à 6 et 9 points.
2. Pour un nombre $n \geqslant 26$ de la forme $3k+2$, il suffit d'appliquer le cas précédent à $n-20$, qui est un multiple de 3, et d'ajouter une action à 20 points.
3. Pour un nombre $n \geqslant 46$ de la forme $3k+1$, il suffit d'appliquer le premier cas à $n-40$, qui est un multiple de 3, et d'ajouter deux actions à 20 points.

Comme tous les entiers $\geqslant 44$ sont dans l'une des trois catégories précédentes, cela démontre bien que 43 est le plus grand score impossible.

Remarques.

— Les scores possibles dans un sport forment ce que l'on appelle un *semigroupe numérique.* Par exemple, on s'est intéressé ici au semigroupe $\langle 6, 9, 20\rangle$. On peut relativement facilement démontrer que si les nombres de points rapportés par les différentes actions (les *générateurs* du semigroupe) n'ont pas de diviseur commun > 1, alors tous les scores sont possibles à partir d'un certain rang (inclus), que l'on appelle le *conducteur* du semi-groupe (et l'entier qui le précède est appelé le *nombre de Frobenius*). Ici, on a donc démontré que le nombre de Frobenius de $\langle 6, 9, 20\rangle$ était 43. Le problème de la détermination du nombre de Frobenius d'un semi-groupe numérique est un problème extrêmement compliqué et très largement ouvert. Pour en savoir plus sur ce sujet, on ne saurait trop recommander l'excellent article *Semi-groupes numériques et conjecture de Wilf* de Shalom Eliahou, paru sur *Images des Mathématiques.*

— Pour ces valeurs spécifiques, on parle parfois du problème des *Chicken McNuggets*, car ces produits étaient vendus par boîtes de 6, 9 et 20. On pourra consulter la vidéo correspondante de l'excellente chaîne Youtube Numberphile.