

---

## Recouvrements

---

### Question

Soit  $\Omega$  un ensemble à  $n$  éléments. Combien y a-t-il de couples  $(A, B)$  de parties de  $\Omega$  telles que  $A \cup B = \Omega$  ?

### Réponse

Si  $A \cup B = \Omega$ , les éléments de  $\Omega$  sont de trois types :

- les éléments appartenant à  $A$  mais pas à  $B$  ; nous dirons qu'un tel élément est **bleu**.
- les éléments appartenant à  $B$  mais pas à  $A$  ; nous dirons qu'un tel élément est **rouge**.
- les éléments appartenant à la fois  $A$  et  $B$  ; nous dirons (logiquement) qu'un tel élément est **magenta**.

Remarquons que rien n'oblige toutes les couleurs à être représentées. Par exemple, si  $A = B = \Omega$ , tous les éléments sont **magenta**.

Réciproquement, si nous colorons arbitrairement tous les éléments de  $\Omega$  en **bleu**, **rouge** et **magenta**, il est facile de construire des parties  $A$  et  $B$  qui redonneront ce coloriage. En effet, il suffit de prendre pour  $A$  l'ensemble des éléments **bleus** ou **magenta** et pour  $B$  l'ensemble des éléments **rouges** ou **magenta**.

Ainsi, il y a autant de couples de parties  $(A, B)$  telles que  $A \cup B = \Omega$  que de coloriages des éléments de  $\Omega$  en trois couleurs. Un tel coloriage n'étant rien d'autre qu'une fonction  $\Omega \rightarrow \{\text{bleu}, \text{rouge}, \text{magenta}\}$ , il y en a exactement  $3^n$ .