Une équation du second degré

Question

Résoudre (à la main !) l'équation $x^2 + x = 1111111122222222$.

Réponse

Le discriminant de l'équation est $\Delta = 1 + 4444444488888888 = 4444444488888889$. On pourrait résoudre l'équation par la méthode standard, en utilisant une méthode d'extraction de racine carrée à la main, mais nous allons contourner ce calcul.

En revanche, vu la forme singulière du second membre, on peut facilement récrire

$$\begin{aligned} x^2 + x = 1111111122222222 &\iff x(x+1) = 1111111111111111 + 11111111 \\ &\iff x(x+1) = \frac{10^{16}-1}{9} + \frac{10^8-1}{9}, \end{aligned}$$

car le n-ième *repunit*, c'est-à-dire le nombre dont l'écriture est consituée de n « 1 », vaut $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$ comme on peut le voir, soit à l'aide de la formule pour la somme d'une suite géométrique :

$$R_n = 1 + 10 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{10 - 1},$$

soit en remarquant que le nombre constitué de n « 9 » est manifestement $10^n - 1$ (mais ces deux arguments ne sont pas si différents...) ?

L'équation devient alors

$$\begin{aligned} x(x+1) = \frac{10^{16}-1}{9} + \frac{10^8-1}{9} &\iff x(x+1) = \frac{(10^8-1)(10^8+1)}{9} + \frac{10^8-1}{9} \\ &\iff x(x+1) = \frac{(10^8-1)(10^8+2)}{9} \\ &\iff x(x+1) = \frac{10^8-1}{3} \times \frac{10^8+2}{3}, \end{aligned}$$

et l'on voit que $x = \dfrac{10^8-1}{3} = \dfrac{99999999}{3} = 33333333$ est une solution « évidente ».

Il suffit ensuite de se souvenir que les deux racines d'un trinôme $x^2 + bx + c$ ont pour somme $-b$ (et produit c) pour en déduire que l'autre racine est -33333334.