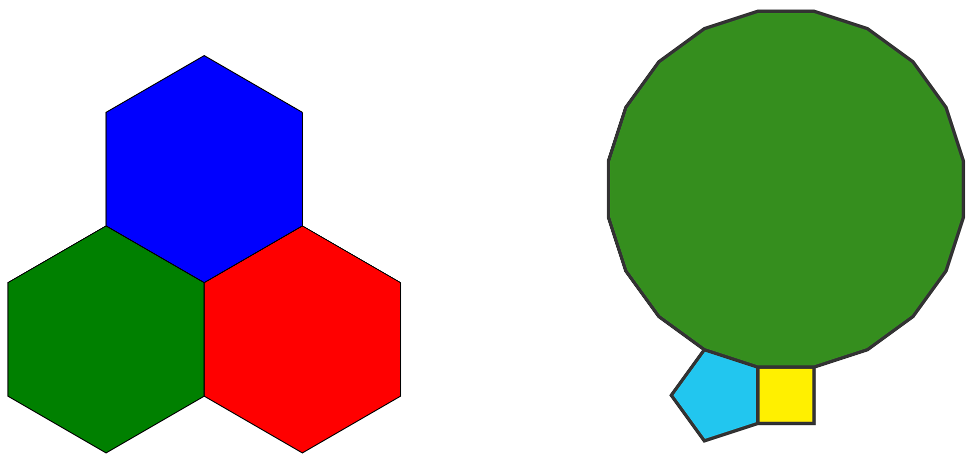
Trois polygones

Question

Il est possible de placer trois polygones réguliers (convexes) dans le plan pour qu'ils s'agencent parfaitement autour d'un sommet commun.

Les deux figures suivantes montrent deux tels agencements : à gauche avec trois hexagones réguliers et à droite avec un carré, un pentagone régulier, et un icosagone (c'est-à-dire un polygone à vingt côtés) régulier.

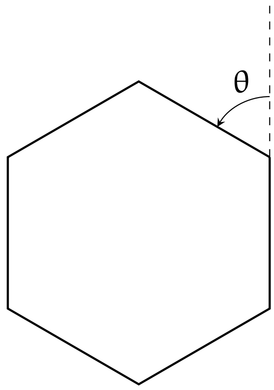


Quel est le plus grand nombre de côtés qu'un polygone présent dans un tel agencement peut avoir ?

Réponse

Pour qu'un tel agencement soit possible, il faut et il suffit que la somme des angles intérieurs des trois polygones réguliers soit égale à 2π. Or, l'angle intérieur d'un polygône à n côtés régulier convexe est $\pi - \dfrac{2\pi}{n}$. Rappelons la preuve de ce fait.

En fait, il est plus facile de déterminer l'angle extérieur θ d'un polygone régulier. En effet, si l'on parcourt le périmètre d'un tel polygone (en partant du milieu d'un côté, par exemple) dans le sens trigonométrique, on fait des trajets en ligne droite, interrompus par n rotations d'angle θ. Puisque l'on revient à la même position et dans la même direction après avoir fait un tour complet, il faut bien que $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$, ce qui donne bien un angle intérieur de mesure $\pi - \theta = \pi - \dfrac{2\pi}{n}$.



Ainsi, si $p \leqslant q \leqslant r$ sont les nombres de côtés de nos trois polygones, la relation que l'on obtient est

$$\begin{aligned}\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) + \left(\pi - \frac{2\pi}{q}\right) + \left(\pi - \frac{2\pi}{r}\right) = 2\pi &\iff \pi = 2\pi\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\\ &\iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

et il s'agit de déterminer quelle est la plus grande valeur de r pouvant intervenir dans une telle décomposition de $\frac{1}{2}$ en somme d'inverses de trois entiers $\geqslant 3$ (car le nombre de côtés d'un polygone est au moins 3).

Déjà, comme $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (ce qui correspond d'ailleurs à nos trois hexagones réguliers), on ne peut pas avoir $p > 6$ et, si $p = 6$, $q = r = 6$ est la seule solution. On peut donc distinguer trois autres cas, suivant les valeurs de p.

— Si $p = 5$, on doit avoir $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$, donc $\frac{1}{q} \leqslant \frac{3}{10}$, ce qui entraîne $q \geqslant 4$. On a donc dans ce cas

$$\frac{1}{r} \geqslant \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \implies r \leqslant 20.$$

— Si $p = 4$, on doit avoir $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{q} < \frac{1}{4}$, ce qui entraîne $q \geqslant 5$. On a donc dans ce cas

$$\frac{1}{r} \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \implies r \leqslant 20,$$

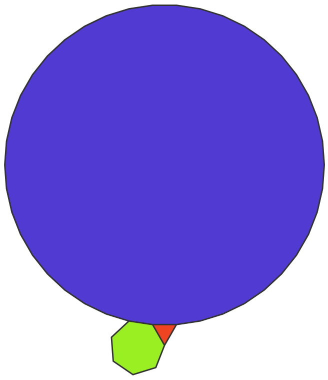
la solution limite $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ correspondant au deuxième exemple donné dans la question.

— Si $p = 3$, on doit avoir $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, donc $\frac{1}{q} < \frac{1}{6}$, ce qui entraîne $q \geqslant 7$. On a donc dans ce cas

$$\frac{1}{r} \geqslant \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \implies r \leqslant 42,$$

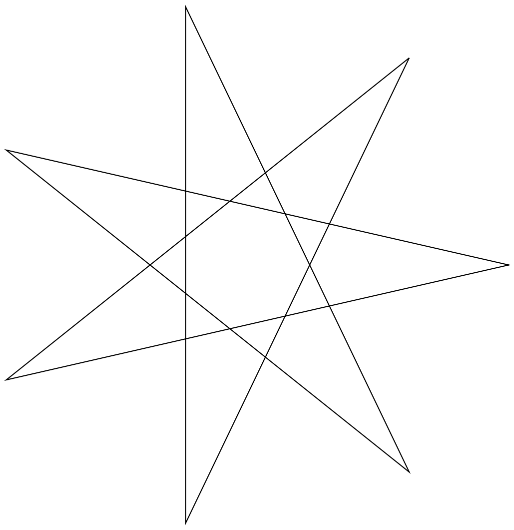
avec une solution limite $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ correspondant à cet agencement d'un triangle, d'un heptagone et d'un 42-gone[1] réguliers :

1. En suivant Kepler et Conway, on peut appeler un tel polygone un *tetracontakaidigone*.



Ainsi, le plus grand grand nombre de côtés possible pour un polygone régulier s'agençant parfaitement avec deux autres polygones réguliers est 42.

Remarque. Le texte original de la question ne mentionnait pas l'hypothèse de convexité des polygones réguliers. C'était une erreur. La définition de polygone régulier inclut généralement les *polygones réguliers étoilés*, comme celui figurant sur la figure suivante.



De tels polygones peuvent être vus comme une variante du n-gone régulier où, au lieu de relier chaque sommet et son voisin, on relie les sommets en en « sautant » $m-1$ à chaque fois. Il est relativement facile de se convaincre que cette construction fournit bien un polygone si $m \leqslant n$ et que n et m sont premiers entre eux. En fait, remplacer m par $n-m$ ne change pas le polygone, donc on peut supposer $2m \leqslant n$. Le n-gone régulier convexe correspond au choix $m = 1$, le polygone de notre figure à $n = 7$ et $m = 3$. Dans la suite, on notera ce polygone régulier $\{m/n\}$.

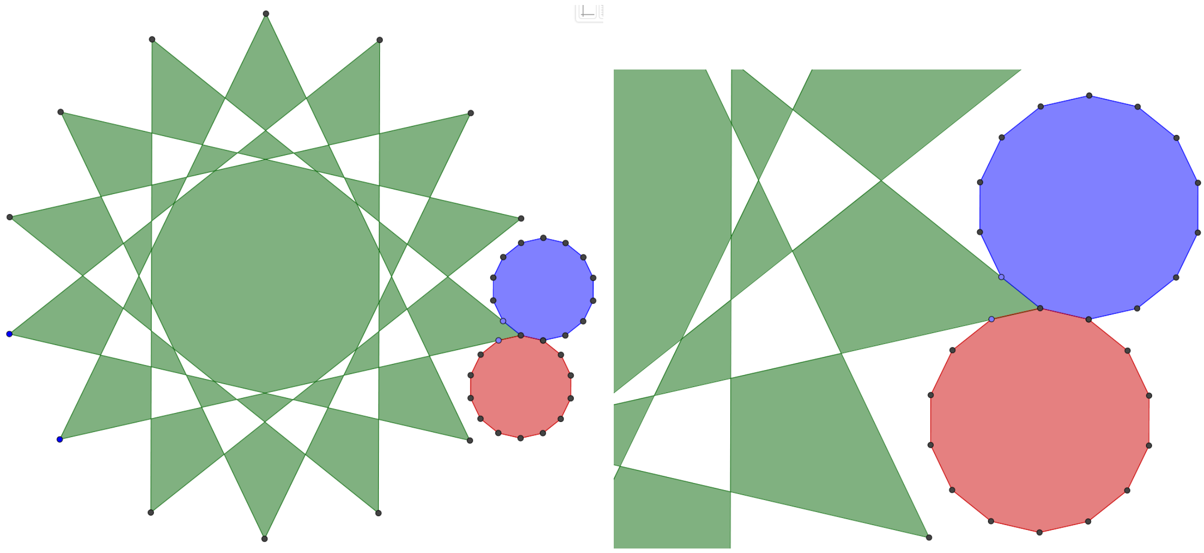
On peut en fait calculer les angles intérieurs de $\{m/n\}$ en recourant à la même méthode que pour les polygones réguliers. Si l'on note θ l'angle extérieur à chaque sommet, la seule différence avec le calcul donné plus haut pour les polygones réguliers convexes et qu'après être revenu sur ses pas, une personne marchant sur le polygone étoilé $\{m/n\}$ aura fait m tours. On a donc $\theta = \dfrac{2\pi m}{n}$, et l'angle intérieur vaut donc $\pi - \theta$. En refaisant le même calcul, on voit par exemple qu'il est possible d'agencer parfaitement un polygone étoilé de symbole $\{m/n\}$, un p-gone régulier convexe et un q-gone régulier convexe autour d'un sommet si

$$\frac{m}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$$

On voit par exemple qu'une possibilité est

$$\frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

qui correspond bien à un agencement de polygones pourvu que $2-n$ et n soient premiers entre eux, ce qui arrive si et seulement si n est impair. Voici par exemple un agencement de trois tétradécagones (14-gones) réguliers, dont un est étoilé.



Ainsi, si l'on n'impose pas aux polygones d'être convexes, il y a des solutions avec des nombres arbitrairement grands de côtés, et la question perd son sens.