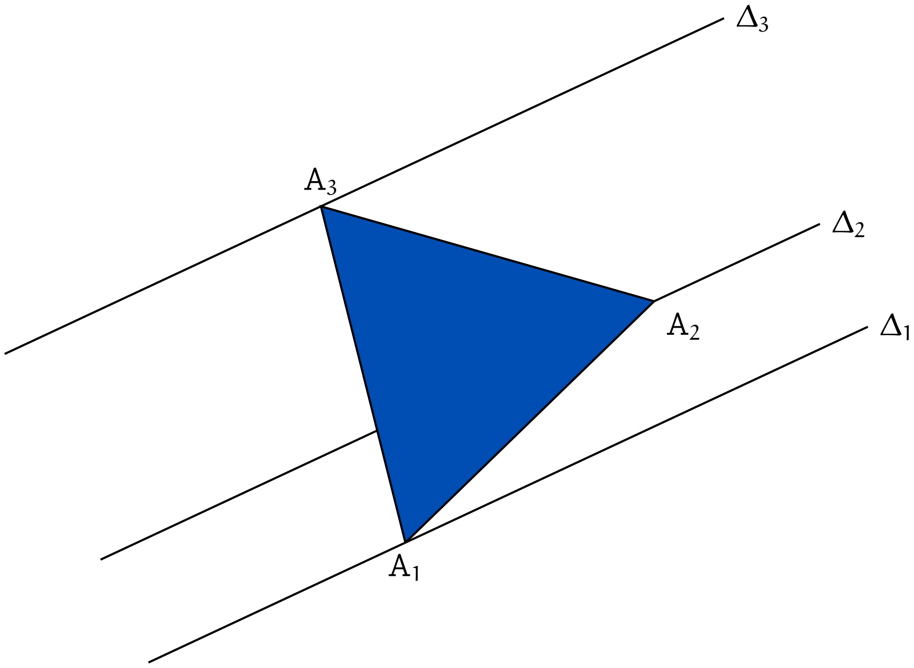
Construire un triangle équilatéral

Question

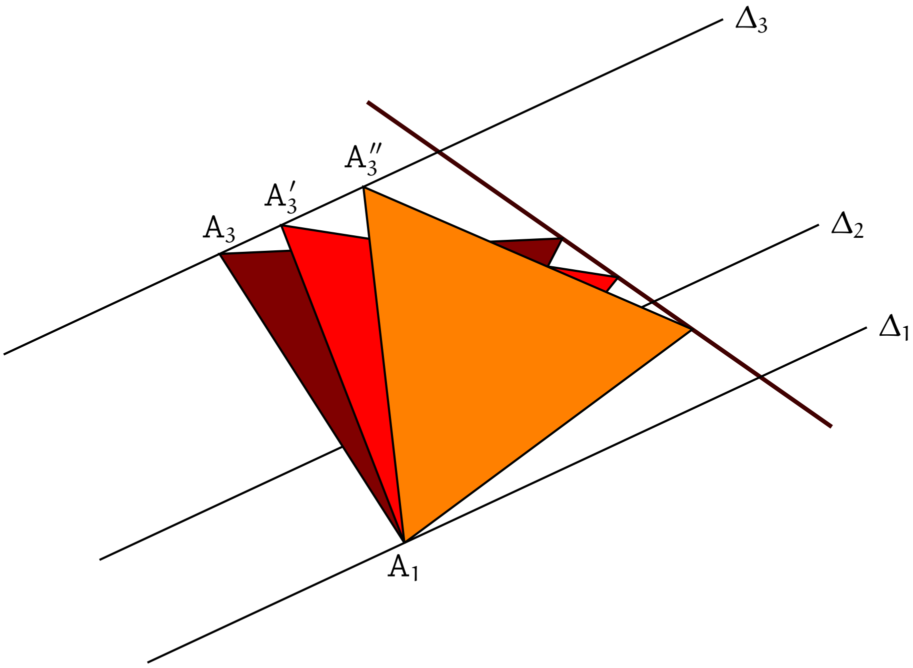
Étant donné trois droites parallèles Δ_1, Δ_2, Δ_3, construire à la règle et au compas un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ tel que $A_1 \in \Delta_1$, $A_2 \in \Delta_2$ et $A_3 \in \Delta_3$.



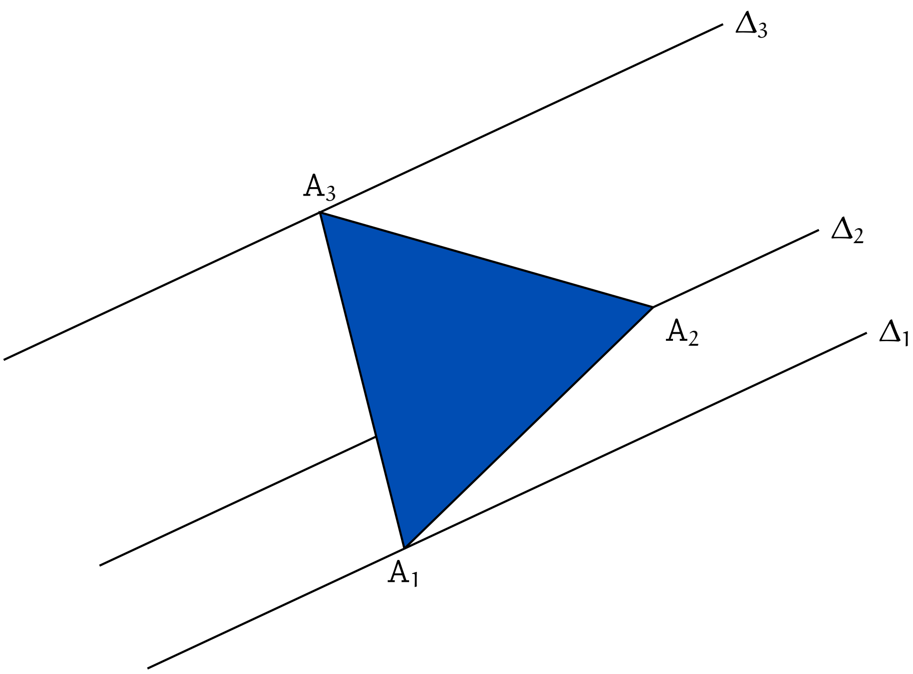
Réponse

Déjà, on se convainc relativement facilement qu'un tel triangle existe. En supposant que la droite Δ_2 est entre les deux autres droites, fixons un point $A_1 \in \Delta_1$ et faisons varier un point A_3 sur Δ_3. On voit alors facilement que l'on peut former un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$, et qu'en faisant varier A_3, A_2 décrit une droite [1] : la solution du problème est à l'intersection de cette droite et de Δ_2.

1. En fait, deux droites : étant donné un segment A_1A_3, il y a deux points A_2 tels que $A_1A_2A_3$ soit équilatéral : un pour lequel A_1, A_2 et A_3 sont ordonnés dans le sens direct et un pour lequel ils sont ordonnés dans le sens indirect. Dans la suite, on se concentre sur une des deux possibilités.



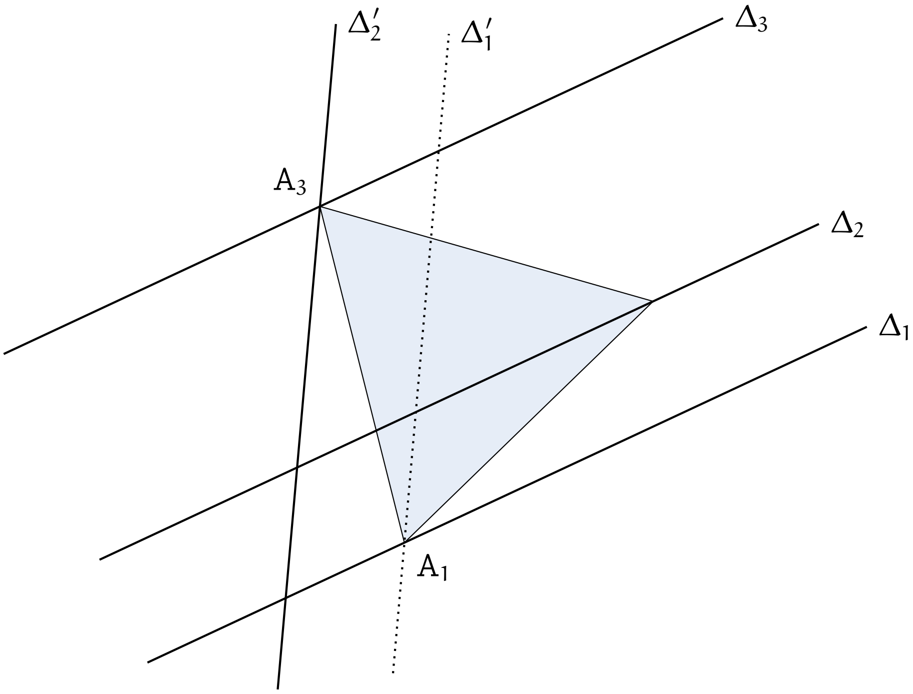
Observons ce qui se passe lorsque le point A_2 est sur Δ_2.



Comme $A_1A_2A_3$ est équilatéral, l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$ est de $60°$. Le point A_2 est donc soumis à deux contraintes : il est sur Δ_2 et son image par la rotation de centre A_1 et d'angle $60°$ est sur Δ_3.

Cela permet la construction du triangle : si les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont données, il s'agit de tracer la droite Δ_2', image de Δ_2 par la rotation [2] de centre A_1 et d'angle $60°$. Le point A_3 est alors à l'intersection de Δ_3 et Δ_2'.

2. Parce que nous avons choisi de construire le triangle $A_1A_2A_3$ direct. Si nous avions fait l'autre choix, il s'agirait de la rotation d'angle $-60°$

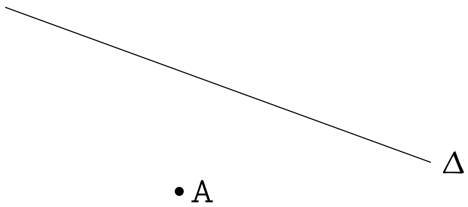


Une solution possible à notre problème est donc la suivante :

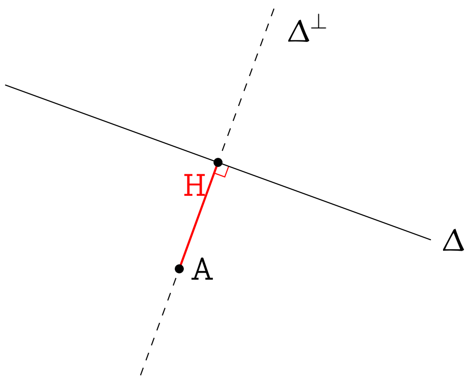
1. Placer un point A_1 sur Δ_1.
2. Construire la droite Δ_2' image de Δ_2 par la rotation de centre A_1 et d'angle $60°$. On appelle A_3 le point d'intersection de Δ_2' et Δ_3 (par construction ces droites ne peuvent pas être parallèles puisque l'angle entre elles est de $60°$).
3. Construire le triangle équilatéral (direct) $A_1A_2A_3$.

Pour pouvoir effectuer cette construction à la règle et au compas, il suffit de s'assurer qu'étant donné un point A (jouant le rôle de A_1) et une droite Δ (jouant celui de Δ_2), on peut construire l'image Δ' de la droite Δ par la rotation de centre A et d'angle $60°$. Voilà une possibilité de construction, une fois que l'on sait construire la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.

But : construire Δ', image de Δ par la rotation de centre A et d'angle $60°$.

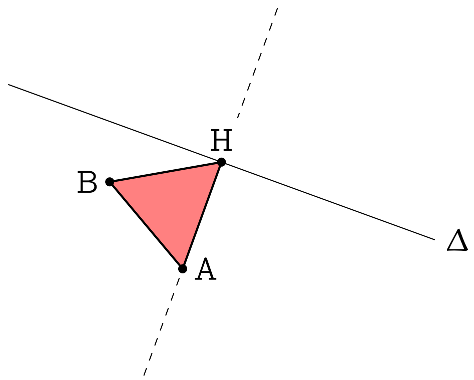


Étape 1 : abaisser la perpendiculaire à Δ passant par A.

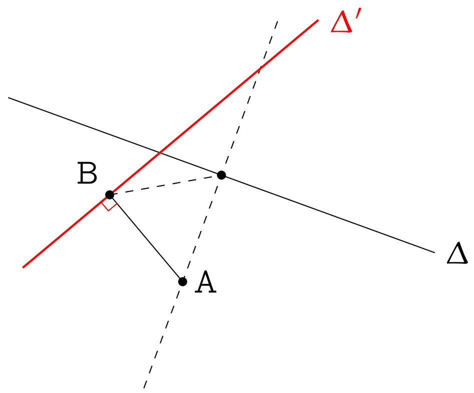


La droite cherchée sera donc perpendiculaire à l'image de [AH] par la rotation de centre A et d'angle 60°.

Étape 2 : construire le triangle équilatéral direct AHB.



Étape 3 : La droite cherchée est maintenant la perpendiculaire à [AB] passant par B.



Cela conclut la construction.