
Heure d'arrivée estimée

Question

Un véhicule parcourt une route de 100 kilomètres. Son GPS estime le temps restant à parcourir en supposant que la vitesse moyenne sur le trajet restant sera égale à la vitesse moyenne depuis le départ. Au bout de 40 minutes, le GPS indique qu'il reste une heure de trajet. Est-il possible que le GPS donne la même indication pendant les cinq heures suivantes ? Si oui, combien de kilomètres resteront-ils à parcourir au bout de ces cinq heures ?

Réponse

En indiquant les temps en heures et les distances en kilomètres, on peut paramétrer la route par un nombre x variant entre 0 et 100 et la position du véhicule par une fonction $x(t) \in [0, 100]$. Les conditions de l'énoncé deviennent alors, pour tout $\frac{2}{3} \leq t \leq 5 + \frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} \frac{\text{distance à parcourir}}{\text{temps estimé}} &= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} \iff \frac{100 - x(t)}{1} = \frac{x(t)}{t} \\ &\iff \left(1 + \frac{1}{t}\right) x(t) = 100 \\ &\iff x(t) = 100 \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui est tout à fait possible (on remarque d'ailleurs que $x(t)$ est une fonction croissante de t , ce qui assure que le véhicule roule toujours dans le bon sens).

Au bout de ces cinq heures, le véhicule aura donc parcouru

$$100 \left(1 + \frac{1}{5 + \frac{2}{3}}\right)^{-1} = 100 \left(1 + \frac{3}{17}\right)^{-1} = 100 \times \frac{17}{20} = 85 \text{ km.}$$