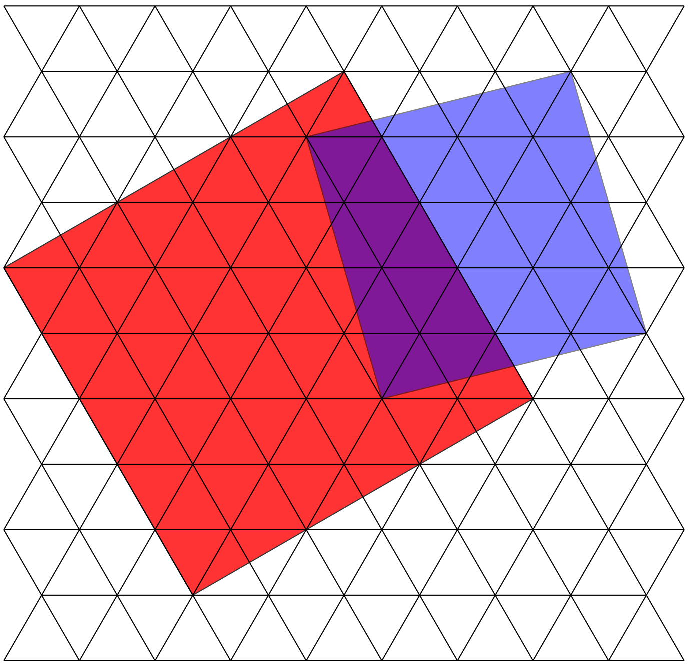
Carrés et triangles

Question

On considère le pavage du plan par des triangles équilatéraux :



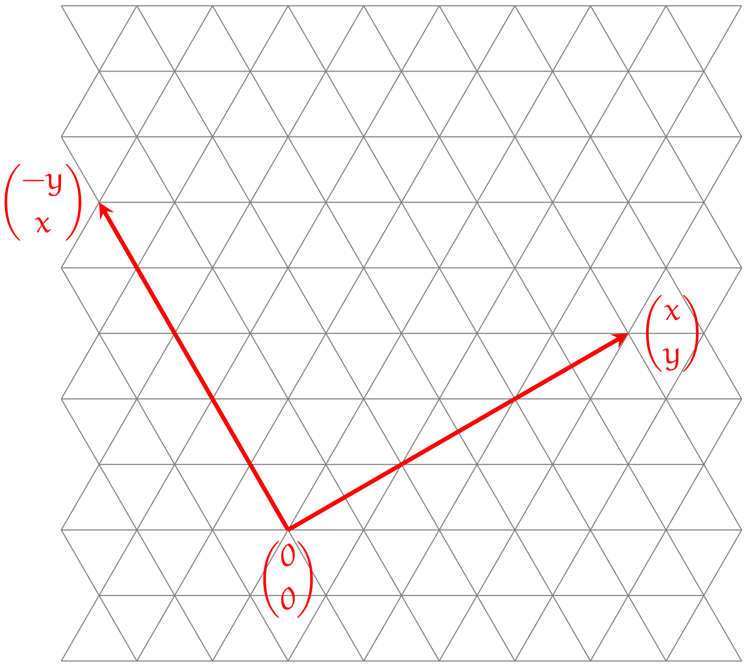
Parmi les sommets des triangles, est-il possible de trouver quatre points formant un carré ?

Réponse

Ça n'est pas possible. Introduisons des coordonnées dans lesquelles un des triangles a pour sommets $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$.

On remarque alors que les sommets des triangles ont pour abscisse des multiples de $1/2$ et pour ordonnée des multiples de $\sqrt{3}/2$.

Or, si quatre des sommets formaient un carré, on pourrait le décaler pour que l'un des sommets soient à l'origine du repère. En particulier, les deux sommets adjacents à $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ auraient pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$.



Le problème est que, d'après ce qui précède, x et y doivent être à la fois des multiples entiers de $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$: en particulier,

$$x = \frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{3}}{2}q, \qquad y = \frac{1}{2}p' = \frac{\sqrt{3}}{2}q',$$

pour deux entiers $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

Comme $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq 0$, x et y ne peuvent pas être tous les deux nuls. Supposons par simplicité que $x \neq 0$ (le cas $y \neq 0$ est similaire). On a donc

$$\frac{\sqrt{3}}{2}q = \frac{1}{2}p \quad \text{donc} \quad \frac{p}{q} = \sqrt{3},$$

ce qui est impossible car $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.