
111...111

Question

Montrer que le nombre $R_n = \underbrace{111 \dots 111}_{n \text{ chiffres}}$ n'est pas un carré si $n > 1$.

Réponse

Commençons par une remarque sur les carrés.

- Si $m = 2k$, $m^2 = 4k^2$ est un multiple de 4 ;
 - Si $m = 2k + 1$, $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ est de la forme $4\ell + 1$.
- Or, si $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
 R_n &= \underbrace{111 \dots 111}_{n-2 \text{ chiffres}} 11 = R_{n-2} \times 100 + 11 \\
 &= R_{n-2} \times 4 \times 25 + 4 \times 2 + 3 \\
 &= 4(25R_{n-2} + 2) + 3,
 \end{aligned}$$

et ce nombre n'est donc pas de la forme 4ℓ ou $4\ell + 1$ et ne peut en particulier pas être un carré.