Jeu de jetons

Question

On considère un paquet de jetons de trois couleurs (rouge, vert et bleu). On s'autorise à chaque coup à remplacer deux jetons de couleurs différentes par un jeton de la troisième couleur. Par exemple, voici une suite de transformations autorisées.

$$\textcolor{red}{\bullet}\textcolor{green}{\bullet}\textcolor{green}{\bullet}\textcolor{green}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet} \to \textcolor{red}{\bullet}\textcolor{red}{\bullet}\textcolor{red}{\bullet}\textcolor{green}{\bullet}\textcolor{green}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet} \to \textcolor{red}{\bullet}\textcolor{red}{\bullet}\textcolor{green}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet} \to \textcolor{red}{\bullet}\textcolor{red}{\bullet}\textcolor{red}{\bullet}\textcolor{red}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}.$$

En partant d'une situation avec 1515 jetons rouges, 1789 jetons verts et 2015 jetons bleus, est-il possible de parvenir à une situation où tous les jetons sont de la même couleur ?

Réponse

Non, c'est impossible.

Notons $n_{\textcolor{red}{\bullet}}$, $n_{\textcolor{green}{\bullet}}$ et $n_{\textcolor{blue}{\bullet}}$ le nombre de jetons de ces trois couleurs. À chaque opération, ces nombres sont modifiés d'une des trois façons suivantes :

$\textcolor{red}{\bullet}\textcolor{green}{\bullet} \to \textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}$ $\quad (n_{\textcolor{red}{\bullet}}, n_{\textcolor{green}{\bullet}}, n_{\textcolor{blue}{\bullet}}) \to (n_{\textcolor{red}{\bullet}} - 1, n_{\textcolor{green}{\bullet}} - 1, n_{\textcolor{blue}{\bullet}} + 2)$;

$\textcolor{green}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet} \to \textcolor{red}{\bullet}\textcolor{red}{\bullet}$ $\quad (n_{\textcolor{red}{\bullet}}, n_{\textcolor{green}{\bullet}}, n_{\textcolor{blue}{\bullet}}) \to (n_{\textcolor{red}{\bullet}} + 2, n_{\textcolor{green}{\bullet}} - 1, n_{\textcolor{blue}{\bullet}} - 1)$;

$\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{red}{\bullet} \to \textcolor{green}{\bullet}\textcolor{green}{\bullet}$ $\quad (n_{\textcolor{red}{\bullet}}, n_{\textcolor{green}{\bullet}}, n_{\textcolor{blue}{\bullet}}) \to (n_{\textcolor{red}{\bullet}} - 1, n_{\textcolor{green}{\bullet}} + 2, n_{\textcolor{blue}{\bullet}} - 1)$.

Rappelons que deux nombres entiers sont dits **congrus modulo** 3 si leur différence est un multiple de 3, c'est-à-dire si elles produisent le même reste (qui peut être 0, 1 ou 2) quand on pose leur division par 3.

L'intérêt de cette notion pour notre jeu est que si n est un nombre entier, $n-1$ et $n+2$ sont congrus modulo 3. Ainsi, en partant de trois nombres qui ne sont pas congrus deux à deux modulo 3 (comme dans notre exemple, puisque $1515 \equiv 0 \pmod 3$, $1789 \equiv 1 \pmod 3$ et $2015 \equiv 2 \pmod 3$), on ne pourra produire que des triplets de nombres possédant cette propriété. En particulier, on ne pourra jamais arriver à une situation où deux des nombres valent 0, c'est-à-dire à une situation incolore.