Deux nombres premiers

Question

Déterminer les couples (p, q) de nombres premiers tels que $p + q = (p - q)^3$.

Réponse

Déjà, l'équation implique que p et q sont distincts. Comme il s'agit de nombres premiers, ils sont premiers entre eux.

Modulo $p + q$, on a la congruence $p - q \equiv -2q$, donc l'équation se réduit en

$$0 \equiv (p - q)^3 \equiv (-2q)^3 \equiv -8q^3 \pmod{p + q}.$$

Autrement dit, le nombre $p+q$ divise $8q^3$. Cependant, $p+q$ ne peut pas être un multiple de q (si c'était le cas, p serait également un multiple de q, mais on a dit que ces deux nombres étaient premiers entre eux). Ainsi, on obtient, par le lemme de Gauss, que $p + q$ divise 8. Comme p et q valent au moins 2, cela entraîne $p + q \in \{4, 8\}$. Mais la seule façon de décomposer 4 en somme de deux nombres premiers est $4 = 2 + 2$ (et $p = q = 2$ n'est pas une solution de notre équation) et la seule façon de décomposer 8 est $8 = 5 + 3$.

En injectant ces candidats dans l'équation, on obtient donc que la seule solution possible est $p = 5$ et $q = 3$.