

**Texte de la 171^e conférence de l'Université de tous les savoirs donnée le 19 juin
2000.**

**La théorie des nœuds
par Eva Bayer**

Un nœud est l'un des objets mathématiques des plus concrets, des plus faciles à expliquer à un non spécialiste. Prenez une ficelle, nouez-la et fixez les deux bouts ensemble : vous avez un nœud. La ficelle est supposée flexible et extensible. Toute transformation continue, qui ne coupe pas la ficelle, est admissible, c'est-à-dire ne change pas le nœud.

Bien que simple à définir, un nœud peut être un objet très compliqué. Ceci suffit déjà à expliquer l'attraction qu'il exerce sur les mathématiciens. Ce qui est beaucoup moins évident, c'est que les nœuds intéressent aussi les physiciens, les chimistes, les biologistes. C'est pourtant le cas, depuis le milieu du XIX^e siècle, et c'est encore le cas aujourd'hui.

Comme beaucoup de sujets mathématiques, la théorie des nœuds s'est développée à la fois à cause des perspectives d'applications (en physique, chimie, biologie), et pour des raisons internes aux mathématiques. Comme c'est souvent le cas, les dernières ont été encore plus déterminantes que les premières. Sans vouloir sous-estimer l'intérêt et l'importance des applications de la théorie des nœuds – on en connaît de plus en plus, comme on le verra à la fin de cet article – les mathématiciens se seraient intéressés aux nœuds même s'ils avaient pensé que ceux-ci n'ont aucune utilité en dehors des mathématiques. Beaucoup de mathématiciens sont attirés par la beauté de ses objets, si concrets et pourtant si compliqués, et aussi par le défi que représente la difficulté de leur classification et la résolution de certaines questions simples à formuler, mais difficiles à résoudre. Certains problèmes, posés il y a plus de 100 ans, ont été résolus tout récemment ; d'autres sont toujours ouverts. Les progrès arrivent souvent de façon inattendue, et sont souvent basés sur des idées venant de sujets mathématiques (ou physiques) dont on ne soupçonnait pas qu'ils puissent avoir un rapport avec les nœuds. Tout ceci fait de la théorie des nœuds une discipline très active, ouverte aux interactions, qui nous réserve sans doute encore des surprises !

Les débuts : Gauss, Tait

Dès 1771, Alexandre-Théophile Vandermonde mentionne les nœuds dans son mémoire *Remarques sur les problèmes de situation*¹. Après lui, le premier mathématicien à s'intéresser aux nœuds serait le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Parmi les notes les plus anciennes de Gauss, on trouve des esquisses de nœuds. Par la suite, Gauss a consacré deux articles aux nœuds. Dans le premier, datant de 1833, il définit le « nombre d'enlacements » de deux nœuds. Ce nombre est ce qu'on appelle aujourd'hui un « invariant topologique » : il ne dépend pas des grandeurs, longueurs ou angles, mais seulement des positions relatives. En 1833, le mot « topologie » n'existait pas. On parlait de *geometria situs*, et il n'était pas du tout clair ce que ce concept devait recouvrir. Dans sa note de 1833, Gauss a dit que l'étude de l'invariant qu'il venait de définir serait une des tâches importantes (*Hauptaufgabe*) de la *geometria situs*.

Pour représenter les nœuds sur le plan, on utilise les *diagrammes de nœuds*. On part d'une projection du nœud sur le plan, et on distingue le passage supérieur du passage inférieur lors d'un croisement [figure 1]. Il est naturel – et très utile – de considérer aussi les nœuds à plusieurs composantes, appelés *entrelacs*. On les représente également par des diagrammes. Le deuxième article que Gauss a écrit sur les nœuds (et entrelacs) est de nature combinatoire, et décrit une façon de coder leurs diagrammes. La méthode de Gauss est fondamentale dans ce domaine.

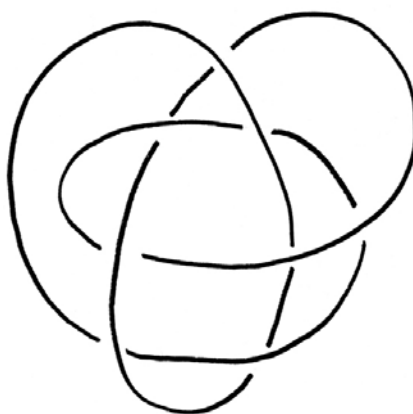


Figure 1

¹ Vandermonde (A.-T.), « Remarques sur les problèmes de situation », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris (1771), 566-574.

Le premier à avoir tenté une classification systématique des nœuds est Peter Guthrie Tait (1831-1901). Influencé par la théorie de Lord Kelvin, d'après laquelle les atomes seraient des nœuds dans l'éther, Tait a décidé que l'étude des nœuds était fondamentale pour la physique et y a consacré les 30 dernières années de sa vie. Il a défini plusieurs concepts qui sont utilisés encore aujourd'hui. Tout d'abord, il a introduit des « mesures de complexité » du nœud. Le plus important d'entre eux est sans doute le *nombre de croisements* du nœud. Il est défini comme étant le plus petit nombre de croisements d'un diagramme représentant le nœud. Si N est un nœud, on notera la somme de N son nombre de croisements. On appelle *nœud trivial* un cercle non noué. Le nombre de croisements du nœud trivial est 0. Les nœuds non-triviaux les plus simples sont le nœud de trèfle et le nœud de huit [figure 2]. Le nombre de croisements du nœud de trèfle est 3 ; celui du nœud de huit est 4.

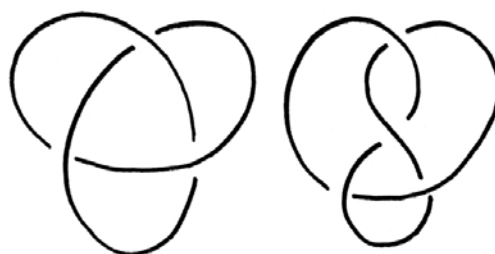


Figure 2

Tait a aussi défini une notion de somme pour les nœuds [figure 3]. Pour que cette opération soit bien définie, on doit *orienter* les nœuds dont on fait la somme, autrement dit les munir d'un sens de parcours. Si N est un nœud, la somme de N avec le nœud trivial est égal à N : le nœud trivial est donc l'élément neutre par rapport à cette opération. Un nœud est dit *décomposable* si l'on peut l'écrire comme somme de deux nœuds non triviaux. Un nœud non trivial qui n'est pas décomposable est dit *indécomposable*, ou *premier*. Tait a constaté expérimentalement que « tout nœud se décompose de façon unique en tant que somme d'un nombre fini de nœuds premiers ». Ceci n'a été démontré que beaucoup plus tard par Schubert, en 1949². Tait n'avait pas à sa disposition les méthodes topologiques nécessaires à cette démonstration.

² Schubert (H.), „Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten“, *Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* (1949), no. 3, 57-104.

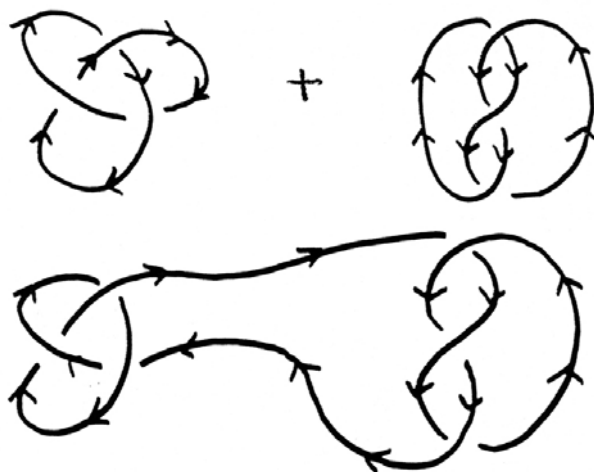


Figure 3

Avec son collaborateur Kirkman, Tait a réussi à énumérer tous les nœuds premiers à au plus 9 croisements. Dans ses tables, il considère les nœuds non orientés, et il ne distingue pas un nœud de son image dans le miroir. Ce principe a été suivi par les successeurs de Tait, qui ont aujourd'hui énuméré les nœuds à au plus 13 croisements. Il n'y a qu'un seul nœud à 3 croisements (le nœud de trèfle), et aussi un seul à 4 croisements (le nœud de huit). Il y en a 49 à 9 croisements³. D'après les travaux de Thistlethwaite⁴, il y a 9988 nœuds à 13 croisements.

Les travaux de Tait et Kirkman étaient empiriques. Ils ne disposaient d'aucune méthode pour démontrer que deux nœuds sont différents, ni même qu'il existe des nœuds non triviaux ! Ce n'est qu'au début du XX^e siècle, grâce aux progrès de la topologie, que de telles démonstrations sont devenues possibles.

Tait s'intéressait avant tout aux nœuds *alternés*, c'est-à-dire ceux qui admettent au moins un diagramme alterné : un passage inférieur est toujours suivi par un passage supérieur. Le diagramme de la **figure 1** n'est pas alterné. De plus, le nœud qu'il représente n'a aucun diagramme alterné, il n'est donc pas alterné. C'est aussi l'un des exemples les plus simples de nœuds non alternés - en effet, tous les nœuds à moins de 8 croisements sont alternés. Tait avait un certain nombre de « principes » pour classer les nœuds alternés : il s'agit d'énoncés dont il était sûr de la validité, sans pouvoir les démontrer. Aujourd'hui, on les appelle les *conjectures de Tait*. Par exemple, Tait pensait que le *nombre de croisements était additif*, autrement dit que si N et N' sont des nœuds, alors $c(N + N') = c(N) + c(N')$. Ceci a été

³ Burde (G.), et H. Zieschang (H.), *Knots*, Berlin, de Gruyter, 1986.

⁴ Thistlethwaite (M.-B.), "Knot tabulations and related topics", in *Aspects of Topology* (James (I.-M.), and Kronheimer (E.-M.), eds.), Cambridge University Press, (1985), 1-76.

démontré en 1987 par Kauffman, Murasugi et Thistlethwaite pour les nœuds alternés⁵. On ne sait toujours pas si l'égalité vaut aussi pour les nœuds non alternés.

Théorie combinatoire des nœuds : opérations de Reidemeister

La théorie des nœuds a connu un nouvel essor au début du XX^e siècle, notamment grâce aux nouvelles méthodes de la topologie : groupe de Poincaré (appelé aussi groupe fondamental), groupes d'homologie, etc. Ceci a permis de réaliser de grands progrès. Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple les travaux de Burde et Zieschang⁶, Crowell et Fox⁷ et Fox⁸.

En même temps, une autre direction de recherche a aussi beaucoup progressé : il s'agit de la *théorie combinatoire des nœuds*. L'un des problèmes fondamentaux est celui-ci : étant donnés deux diagrammes de nœuds D_1 et D_2 , comment décider si les nœuds qu'ils définissent sont les mêmes ? D'une certaine manière, Kurt Reidemeister a apporté une solution à ce problème. Il a défini trois opérations sur un diagramme de nœud, appelés *mouvements de Reidemeister*. Il s'agit de modifier une partie du diagramme, en laissant le reste tel quel. Ces trois opérations ne changent pas le nœud. La première consiste à faire apparaître (disparaître) une petite boucle ; la deuxième à faire apparaître (disparaître) deux croisements jumelés ; la troisième à faire passer une branche au dessus d'un croisement [**figure 4**]. Inversement, Reidemeister⁹ a démontré que « deux diagrammes définissent le même nœud si et seulement si l'on peut passer de l'un à l'autre en faisant un nombre fini de fois les trois opérations ci-dessus ». Malheureusement, on ne sait pas *combien de fois* on doit effectuer ces opérations ! Ce résultat est néanmoins très utile, comme nous le verrons.

⁵ Murasugi (K.), "The Jones polynomials and classical conjectures in knot theory", *Topology* 26 (1987), 187-194.

Murasugi (K.), "The Jones polynomials and classical conjectures in knot theory". II, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 102 (1987), 317-318.

⁶ Op. cit.

⁷ Crowell (R.-H.), Fox (R.-H.), *Introduction to knot theory*, Springer Verlag, 1963.

⁸ Fox (R.-H.), "A quick trip through knot theory", in *Topology of 3-manifolds and related topics*, Prentice—Hall (1962), 120-167.

⁹ Reidemeister (K.), *Knot Theory*, Chelsea, New York, 1948.

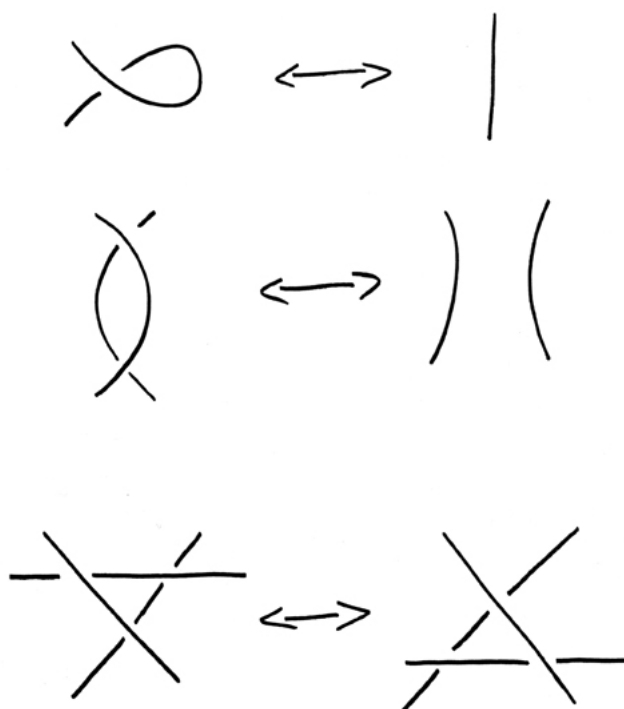


Figure 4

Invariants de nœuds

Pour aborder des problèmes de classification, les mathématiciens utilisent souvent des *invariants*. Un invariant de nœud est un objet qui ne dépend que du nœud, et non de la manière que l'on a de représenter le nœud. Les mesures de complexité définies par Tait en sont des exemples. Ainsi, le nombre de croisements d'un nœud est un invariant. Il y a aussi plusieurs invariants obtenus grâce à la topologie algébrique : le groupe du nœud (groupe fondamental du complémentaire), des groupes d'homologie, formes quadratiques et hermitiennes, etc. Ici, nous ne parlerons que d'invariants qui peuvent se décrire grâce à *n'importe quel diagramme du nœud* et qui sont faciles à calculer et à comparer.

L'un des invariants des plus simples, défini par Fox, est donné grâce à la notion de *tricolorabilité*. On dit qu'un diagramme de nœud est tricolorable si l'on peut le colorier en utilisant trois couleurs, en respectant les règles suivantes. Chaque brin doit être colorié d'une seule couleur. À chaque croisement, soit les trois couleurs doivent être présentes, soit une seule couleur doit l'être. Finalement, on doit utiliser au moins deux couleurs sur les trois pour colorier le nœud. On démontre que la propriété d'être tricolorable est un invariant du nœud : autrement dit, soit tous les diagrammes du nœud sont tricolorables, soit aucun ne l'est. Pour

cette démonstration, on utilise le théorème de Reidemeister¹⁰. En effet, il suffit de vérifier que les mouvements de Reidemeister ne changent pas la propriété de tricolorabilité !

On vérifie facilement que le nœud de trèfle est tricolorable, et que le nœud de huit ne l'est pas. Le nœud trivial n'est pas tricolorable non plus. Ainsi, on peut démontrer que le nœud de trèfle n'est pas trivial, et aussi qu'il est différent du nœud de huit. Cet invariant est donc utile, mais il est très faible : il ne sépare les nœuds qu'en deux classes. Une des démarches de la théorie des nœuds est de chercher des invariants de plus en plus puissants. L'idéal serait de trouver un *invariant complet*, c'est-à-dire un invariant qui permet de distinguer tous les nœuds.

Les *invariants polynomiaux* ont pris beaucoup d'importance. Le premier d'entre eux a été défini par J.-W. Alexander en 1928¹¹. Le polynôme d'Alexander n'est pas un invariant complet : par exemple, il ne distingue pas un nœud de son image dans le miroir. Le polynôme d'Alexander du nœud trivial est égal à 1. Il existe aussi des nœuds non triviaux de polynôme d'Alexander 1 – ce polynôme ne permet donc pas toujours de décider si un nœud est trivial ou non. Cependant, c'est un invariant très utile. Par exemple, il permet de distinguer la plupart des nœuds des tables de Kirkman et Tait. Il existe beaucoup de définitions de ce polynôme. Certaines sont combinatoires, et permettent un calcul rapide du polynôme à partir d'un diagramme. D'autres sont basées sur des concepts familiers de la topologie algébrique, et permettent de comprendre cette notion en la situant dans un cadre plus général.

La découverte d'un nouvel invariant polynomial par V.-R. Jones en 1984 a été beaucoup plus surprenante, et a causé une véritable révolution dans la théorie des nœuds. La première définition de Jones est basée sur des idées issues de la théorie des algèbres de von Neumann et des algèbres de Hecke, et peut paraître tout d'abord miraculeuse !¹². Aujourd'hui, on dispose de plusieurs autres définitions, grâce aux travaux (entre autres) de Kauffman, Witten, et de Jones lui-même. Contrairement au polynôme d'Alexander, on n'en a pas trouvé de définition topologique. Par contre, ce polynôme est lié à des domaines des mathématiques et de la physique dont on ne soupçonnait pas qu'ils puissent avoir un rapport quelconque avec les nœuds. Comprendre ces phénomènes est encore un sujet de recherche en plein

¹⁰ Adams (C.), *The knot book*, Freeman, 1994.

¹¹ Alexander (J.-W.), "Topological invariants of knots and links", *Trans. Amer. Math. Soc.* {bf 60 (1928), 275-306.

¹² Jones (V.-F.-R.), "A polynomial invariant of knots via von Neumann algebras", *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985), 103-111.

Jones (V.-F.-R.), "Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials", *Ann. of Math.* 126 (1987), 335-388.

Harpe (P. de la), Kervaire (M.), Weber (C.), « On the Jones polynomial », *Enseign. Math.* 32 (1986), 271-335.

développement. Ce polynôme a aussi été à la base de la démonstration des « conjectures de Tait ». Par exemple, le nombre de croisements d'un nœud alterné se lit très facilement à partir de son polynôme de Jones. Ce nouvel outil a donc permis de résoudre des problèmes datant de plus de 100 ans.

D'autre part, il existe aussi une définition de nature combinatoire qui fait apparaître une grande similitude entre les polynômes d'Alexander et de Jones. Il s'agit de la théorie des *invariants d'écheveau*, inventée par J. Conway en 1969. La relation d'écheveau est une relation liant les invariants des entrelacs N_+ , N_- et N_0 , chaque fois que ces trois entrelacs ne diffèrent qu'à un seul croisement, comme dans la **figure 5**. Plus précisément, si P est un invariant à valeurs dans un anneau A (le plus souvent un anneau de polynômes), on dit que P satisfait une relation d'écheveau s'il existe a_+ , a_- et $a_0 \in A$ tels que $a_+P_{N_+} + a_-P_{N_-} + a_0P_{N_0} = 0$. Les polynômes d'Alexander et de Jones satisfont tous deux à de telles relations. Il existe aussi un polynôme à deux variables qui permet de retrouver chacun de ces deux polynômes¹³. Cette belle théorie a cependant ses limites : aucun invariant d'écheveau n'est un invariant complet.

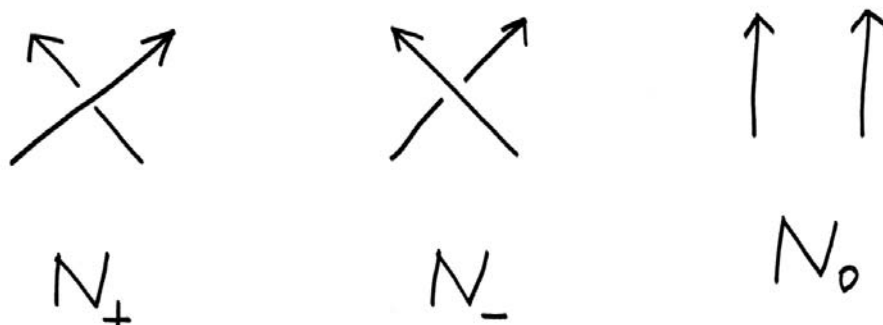


Figure 5

L'approche de Vassiliev, datant de la fin des années 80, a également apporté une approche nouvelle de la théorie des nœuds. Elle présente deux innovations majeures. D'une part, en plus des nœuds habituels, Vassiliev considère aussi des *nœuds singuliers*, c'est-à-dire ayant des points doubles. D'autre part, sa théorie permet d'aborder *tous* les invariants numériques des nœuds en même temps, et de retrouver les invariants polynomiaux définis précédemment¹⁴. Beaucoup de spécialistes pensent que la théorie de Vassiliev permettra de

¹³ Harpe (P. de la), Kervaire (M.), Weber (C.), *Op. cit.*

¹⁴ Birman (J.), Yin (X.-S.), "Knot polynomials and Vassiliev invariants", *Invent. Math.* 111 (1993), 253-287.

distinguer tous les nœuds, mais ce n'est pas démontré à l'heure actuelle. Il n'est pas possible d'en dire plus ici, mais le lecteur pourra consulter les articles de Vassiliev¹⁵ et Vogel¹⁶, ainsi que les présentations accessibles aux non-spécialistes dans les articles de Sossinsky¹⁷.

Comme nous l'avons vu, on dispose maintenant de beaucoup d'invariants. Si aucun des invariants polynomiaux connus n'est un invariant complet, il existe des invariants plus sophistiqués qui le sont - ou presque. En effet, Gordon et Luecke ont démontré en 1989 que pour les nœuds *premiers*, le groupe du nœud est un invariant complet. C'est un résultat important, mais qui ne met pas fin à la recherche sur les nœuds et leurs invariants. Le groupe d'un nœud est un objet compliqué. Il serait très intéressant de trouver un invariant complet plus simple – par exemple, un invariant polynomial.

Déjà au XIX^e siècle, une partie des motivations pour l'étude des nœuds venait des perspectives d'applications dans d'autres sciences. C'est encore le cas aujourd'hui. Les liens avec la physique sont nombreux¹⁸. La théorie des nœuds intervient aussi en chimie et biologie, et ceci de deux manières. D'une part, les chimistes créent des molécules nouées ou entrelacées afin d'obtenir de nouvelles substances ayant des propriétés intéressantes¹⁹. La théorie des nœuds est également utile pour l'étude de la topologie de l'ADN. Bien que l'ADN naturel soit rarement noué, des nœuds et entrelacs se forment lors des processus de réplication, transcription et recombinaison. Certains enzymes, appelés *topoisomérases*, modifient la topologie de l'ADN²⁰. Leur action rappelle les transformations topologiques qui interviennent dans les relations d'écheveau utilisés pour le calcul de certains invariants polynomiaux [figure 5].

Pour en savoir plus

- Bar-Nathan (D.), « On the Vassiliev knot invariants », *Topology* 34, 423-475.

¹⁵ Vassiliev (V.-A.), « Cohomology of knot spaces, Theory of singularities and its applications » (Arnold (V.-I.), ed.), *Advances in Soviet Math.* vol. I, rev. ed. *Amer. Math. Soc.* Providence, RI, 1990, 23-70.

Vassiliev (V.-A.), *Complements of discriminants of smooth maps*, Topology and applications, rev. ed. *Amer. Math. Soc.* Providence, RI, 1994.

¹⁶ Vogel (P.), « Invariants de Vassiliev des nœuds », Séminaire Bourbaki 1992/93, *Astérisque* 216, Exp. 769, 20p.

¹⁷ Sossinsky (A.), « Les invariants de Vassiliev », *Pour la Science*, dossier hors-série, avril 1997, 82-85. Sossinsky (A.), *Nœuds*, éditions du Seuil, Paris, 1999.

¹⁸ Kauffman (L.), *Knots and Physics*, World Scientific, 1991.

¹⁹ Sauvage (J.-P.), « La topologie moléculaire », *Pour la Science*, dossier hors-série, avril 1997, 112-118.

²⁰ Wang (J.), « Les enzymes qui modifient la topologie de l'ADN », *Pour la Science*, dossier hors-série, avril 1997, 120-129.

- Birman (J.), “Braids, links and mapping class groups”, *Annals of Mathematics Studies* 82, Princeton University Press, 1976.
- Conway (J.-H.), “An enumeration of knots and links”, *Computational problems in abstract algebra* (ed. J. Leech), Pergamon Press(1969), 329-358.
- Duplantier (B.), « Les polymères noués », *Pour la Science*, dossier hors-série, avril 1997, p. 119.
- Gordon (C. McA.), Luecke (J.), “Knots are determined by their complements”, *J. Amer. Math. Soc.* 2 (1989), 371-415.
- Jones (V.-F.-R.), « Les nœuds en mécanique statistique », *Pour la Science*, dossier hors-série, avril 1997, 98-103.
- Kauffman (L.), “On knots”, *Annals of Mathematics Studies* 115, Princeton University Press, 1987.
- Stasiak (A.), « Nœuds idéaux et nœuds réels », *Pour la Science*, dossier hors-série, avril 1997, 106-111.
- Tait (P.-G.), « On knots », I.II.III., *Scientific Papers, Vol I.* (1898), 273-347.
- Witten (E.), “Quantum field theory and the Jones polynomial”, *Comm. Math. Phys.* 121 (1989), 351-399.