

---

## Deviner le polynôme

---

### Question

Alice et Bob jouent à un jeu : Bob pense à un polynôme  $P$  à coefficients entiers positifs et Alice doit le deviner. À chaque tour, Alice demande la valeur de  $P$  en un nombre entier, et Bob la lui donne. En combien de tours Alice pourra-t-elle deviner  $P$  ?

(Précisons qu'Alice sait que les coefficients de  $P$  sont des entiers positifs, mais qu'elle n'en sait pas plus. En particulier, elle n'a aucune information sur son degré.)

### Réponse

Alice peut déterminer le polynôme avec seulement deux questions.

Pour cela, remarquons que si  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ , avec  $a_k \in \mathbb{N}$  et qu'un entier  $n$  est strictement plus grand que tous les  $a_k$ , la donnée de  $P(n)$  détermine le polynôme  $P$  :

$$P(n) = \sum_{k=0}^d a_k n^k$$

et les  $a_k$  sont simplement les « chiffres » de l'écriture de  $P(n)$  en base  $n$ .

Ainsi, Alice peut poser la première question « Combien vaut  $P(1)$  ? » La réponse de Bob est  $P(1) = \sum_{k=0}^d a_k$ , qui est évidemment plus grand (au sens large) que les coefficients  $a_k$ .

Alice n'a alors plus qu'à prendre n'importe quel entier  $n > P(1)$  et à demander la valeur de  $P(n)$ .