Des probabilités dans l'avion

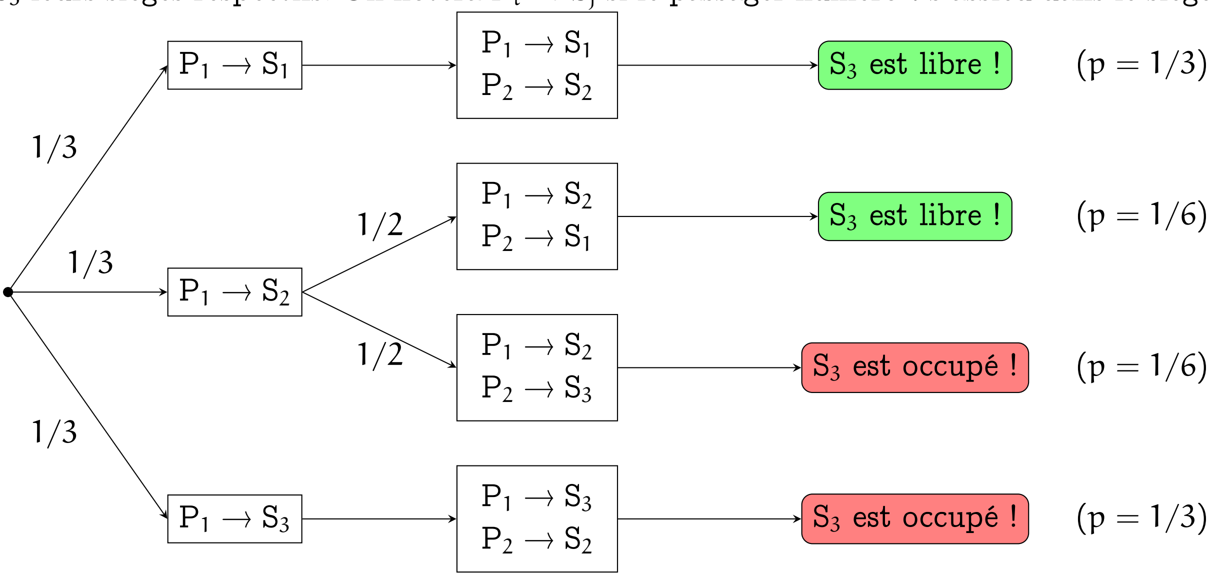
Question

Des passagers embarquent à bord d'un Airbus A380. L'avion est complet. Idéalement, les passagers devraient embarquer un à un et s'asseoir à leur place. Cependant, le premier passager, étourdi, s'assoit à une place aléatoire. Ensuite, les passagers s'assoient à leur place si elle est libre, et à une place libre, aléatoirement, sinon. Vous embarquez le dernier. Quelle est la probabilité que votre place soit occupée ?

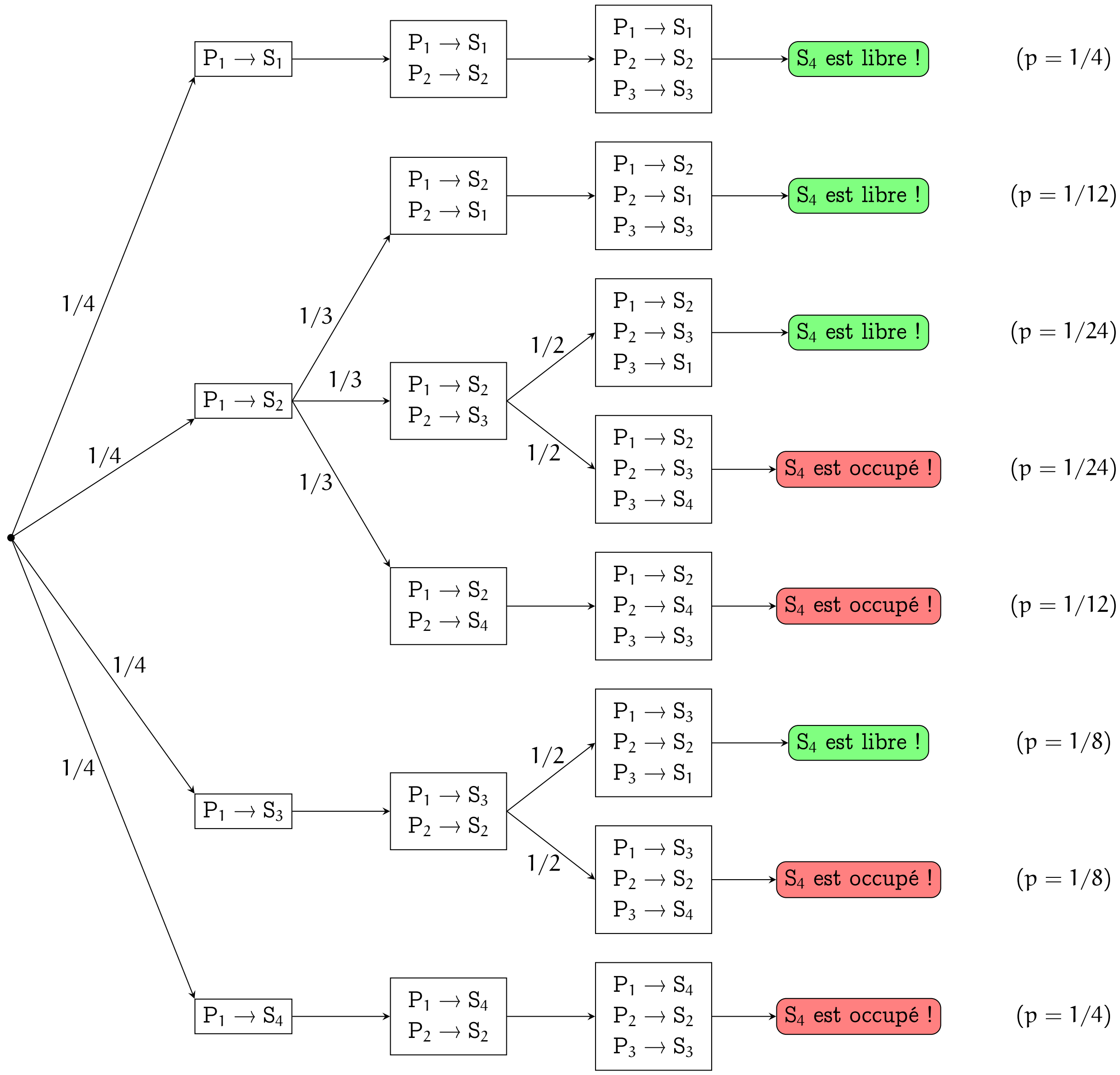
Réponse

Commençons à remplacer l'Airbus A 380 par un avion plus petit. Si l'avion n'a que deux places, la probabilité est $1/2$: soit le passager étourdi s'assied à sa place et la mienne sera libre, soit il s'assied à la mienne et elle sera occupée.

Dans le cas de trois passagers, la situation est un peu plus compliquée, mais on peut encore étudier tous les cas. Appelons-les P_1, P_2 et P_3, dans l'ordre dans lequel ils entreront dans l'avion (ainsi, P_1 est l'étourdi par qui les ennuis arrivent et je suis P_3) et notons S_1, S_2 et S_3 leurs sièges respectifs. On notera $P_i \to S_j$ si le passager numéro i s'assied dans le siège j.



On pourrait même envisager de traiter le cas d'un avion à quatre passagers, mais les détails deviennent un peu pénibles :



On observe que dans nos deux cas, la probabilité cherchée est $1/2$. Démontrons que c'est toujours le cas. On peut rédiger cette preuve de nombreuses façons : choisissons pour le moment d'utiliser le vocabulaire des variables aléatoires.

Observons ce qui se passe quand les k premiers passagers P_1, P_2, ..., P_k sont installés dans l'avion ($1 \leqslant k < n$). Les sièges $S_2, \dots, S_k$ sont alors occupés (si S_k n'est pas occupé par P_k, c'est que celui-ci l'a déjà trouvé occupé quand il est monté dans l'avion). Ainsi, quand les k premiers passagers sont dans l'avion, les sièges occupés sont $S_2, \dots, S_k$ et un autre siège. Appelons N_k le numéro de ce siège.

Chaque N_k est une variable aléatoire vivant dans $\{1\} \cup \{k+1, k+2, \dots, n\}$. On a donc une suite $(N_k)_{k=1}^{n-1}$ de variables aléatoires et la probabilité cherchée est $P(N_{n-1} = 1)$. (En effet, $N_{n-1} \in \{1, n\}$), donc soit $N_{n-1} = 1$ et le siège S_n est libre, soit $N_{n-1} = n$ et le siège S_n est occupé.) Au commencement, N_1 suit une loi uniforme : N_1 est simplement le siège occupé par P_1. On a donc $P(N_1 = i) = 1/n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Nous allons montrer par récurrence que N_k suit également une loi uniforme, c'est-à-dire que

$$\forall i \in \{1\} \cup \{k+1, \dots, n\}, \quad P(N_k = i) = \frac{1}{n-k+1}.$$

Pour cela, analysons ce qui se passe au moment où P_{k+1} rentre dans l'avion. Par définition, les sièges occupés sont exactement $S_2, \dots, S_k$ et S_{N_k}.

– Si $N_k \neq k+1$, le siège S_{k+1} est donc libre, et P_{k+1} s'y assied. On a donc $N_{k+1} = N_k$.
– Sinon, P_{k+1} s'assied sur un des sièges libres, c'est-à-dire que N_{k+1} prend l'une des valeurs 1 ou $k+2, k+3, \dots, n$ avec égale probabilité.

En formules, pour tout $i \in \{1\} \cup \{k+2, \dots, n\}$, on a donc

$$\begin{aligned}
P(N_{k+1} = i \,|\, N_k = k+1) &= \frac{1}{n-k}, \\
P(N_{k+1} = i \,|\, N_k \neq k+1) &= P(N_k = i \,|\, N_k \neq k+1) = \frac{1}{n-k}.
\end{aligned}$$

Ces deux probabilités étant égales, la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned}
P(N_{k+1} = i) &= \frac{1}{n-k} \cdot P(N_k = k+1) + \frac{1}{n-k} \cdot P(N_k \neq k+1) \\
&= \frac{1}{n-k}.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$P(\text{je trouve mon siège libre}) = P(N_{n-1} = 1) = 1/2.$$

On peut maintenant donner une rédaction plus imagée de notre preuve : dans la réalité, les passagers d'un avion découvrant quelqu'un à leur place ne s'effacent pas si facilement, mais ont plutôt tendance à chasser (poliment) le passager égaré. Qu'est-ce que ce modèle plus réaliste change au problème ?

En fait, pas grand chose : les sièges occupés à un instant donné avec l'un ou l'autre modèle sont les mêmes. La seule différence est que dans ce nouvau modèle, les passagers $P_2, \dots, P_k$ sont assis à leur place et que c'est P_1 qui se déplace, à chaque fois qu'il est chassé d'un siège par son propriétaire légitime, jusqu'à atterrir sur S_1 ou S_n. Or, à chaque fois que P_1 choisit aléatoirement un siège, la probabilité de choisir S_1 est égale à celle de choisir S_n. Au moment où j'entrerai dans l'avion, P_1 sera donc sur l'un de ces deux sièges avec la même probabilité, ce qui entraîne bien que la probabilité que je trouve mon siège libre est $1/2$.