

Avant et après Boole, l'émergence de la logique moderne

Alain Le Mignot*

2- La percée due à Boole

Résumé - Les conditions économiques et sociales en Angleterre au début du XIX^e siècle induisent des tensions dans les milieux universitaires jusqu'alors très fermés. Cette agitation se traduit, pour ce qui nous intéresse, à travers la manière d'insérer la logique dans un enseignement en pleine mutation. Des avancées conceptuelles d'apparences mineures voient alors le jour et c'est sur Boole, mathématicien autodidacte, que tout se cristallise : il réussit à construire un système de type algébrique pour résoudre les problèmes de logique. Son 'algèbre de la logique', qui est vraiment opérationnelle par-delà ses réelles insuffisances, sera critiquée, contestée. Mais l'élan a été donné, la logique va devenir une branche des mathématiques.

© CultureMATH – ENS Paris – DGESCO – Editeur : Eric Vandendriessche. Toute reproduction pour publication ou à des fins commerciales, de la totalité ou d'une partie de l'article, devra impérativement faire l'objet d'un accord préalable avec l'éditeur (ENS Ulm). Toute reproduction à des fins privées, ou strictement pédagogiques dans le cadre limité d'une formation, de la totalité ou d'une partie de l'article, est autorisée sous réserve de la mention explicite des références éditoriales de l'article.

* Professeur de mathématiques : alemi@nerim.net

L'auteur remercie Marie-José Durand-Richard pour ses conseils précieux qui l'ont aidé à constituer ce dossier.

1 - Les conditions d'émergence de la logique booléenne

Au début du XIX^e siècle, il n'existait en Grande Bretagne que deux universités, anglicanes, Oxford et Cambridge dont la mission était de former le clergé, les lettrés et la classe dirigeante. Ces vénérables institutions sont alors des lieux de transformations importantes pour notre sujet, tant sur le plan institutionnel que conceptuel.

Il faut considérer que la révolution industrielle commencée (en Grande Bretagne) vers 1760 avait produit de grands bouleversements dans tous les domaines. Mais l'insularité de la Grande Bretagne et un repli sur soi dans la crainte de la contagion des événements de la révolution française, ainsi que les effets du blocus maritime, avaient empêché l'évolution de la société qui paraissait figée. Or vers 1815, la Grande Bretagne avec ses institutions anciennes est le pays le plus puissant d'une Europe alors en pleine transformation.

Il fallait alors que des choses bougent pour une bourgeoisie industrielle en pleine affirmation d'elle-même, et dont les préoccupations et les intérêts ne coïncidaient pas avec ceux, traditionnels, des propriétaires fonciers. Le développement industriel multiplie les besoins concrets pour les chemins de fer, les ponts, les mines, les usines, etc., et appelle la formation d'ingénieurs, réclamée par la classe montante. Corrélativement, c'est aussi une autre vision des sciences et de leur rôle qui tendait à se mettre en place, beaucoup plus tournée vers l'utilitarisme et l'efficacité. C'est pour répondre à ces préoccupations, sans toutefois mettre en péril les institutions existantes, qu'un groupe d'étudiants mathématiciens de Cambridge (le Réseau des Algébristes Anglais comme les nomme Marie José Durand-Richard) réunis autour de Charles Babbage (1791-1871) et George Peacock (1791-1858) entreprend de moderniser l'enseignement. Un des buts est, en particulier, d'introduire l'analyse algébrique continentale, principalement les travaux de Louis Lagrange (1736-1813) et les traités d'enseignement de Sylvestre-François Lacroix (1765-1843). Il s'agit de faire entrer, outre les notations leibniziennes, les méthodes algébriques modernes dans un enseignement des mathématiques où, dès le XVIII^e siècle, une sorte de vénération aux mânes du grand Isaac Newton avait figé tant les notations que les méthodes.

Pour éclairer cette situation, nous nous contenterons d'une citation :

« Tout au long de la première moitié du XIX^e siècle, le « network de Cambridge » est donc au cœur de toutes les entreprises qui vont assurer, par le biais de l'institutionnalisation et de la mathématisation de la science, la dissolution progressive de « l'alliance sacrée »

entre théologie et philosophie naturelles, et vont permettre à l'Angleterre de traverser la double tourmente induite par la Révolution française et la révolution industrielle en maintenant la continuité de ses institutions. Il assure pendant toute cette période une fonction d'harmonisation essentielle qui va permettre à la vieille aristocratie terrienne et à la nouvelle bourgeoisie de se reconnaître ensemble dans un même mode d'appréhension d'un monde où la rationalité est devenue aussi synonyme d'efficacité ». [Durand-Richard 1996, p. 463]

Pour ces algébristes anglais, la légitimation des mathématiques n'était plus à chercher dans la géométrie mais dans l'analyse algébrique qui ouvre des possibilités incontestables, en particulier dans la résolution des équations différentielles. Cette analyse algébrique ne saurait pourtant s'imposer à Cambridge sans y être construite et reconnue comme science, présentée sous forme déductive. Peacock élabore ainsi une restructuration de l'algèbre, qui distingue recherche heuristique et phase de théorisation. L'« algèbre arithmétique », qui traite des nombres, nous donne l'expérience des calculs. Et sur son modèle, nous pouvons alors accéder à l'« algèbre symbolique » où seule la forme des calculs importe, la signification en étant séparée car elle est devenue une interprétation. Il s'agit de mettre en avant les propriétés des opérations indépendamment des objets sur lesquels elles s'appliquent, permettant ainsi la découverte de nouveaux objets et de nouvelles applications dans des cadres différents :

« La spécificité de l'Ecole algébrique anglaise s'inscrit dans cette conviction de la légitimité des mécanismes opératoires, et dans la recherche d'une explicitation de leurs propriétés formelles, qui conduit les mathématiques, non plus à représenter des objets, mais à signifier des combinaisons opératoires. ». [Durand-Richard 1996, p. 465]

Cette restructuration maintient cependant l'existence d'une relation forte entre travail heuristique et explicitation formelle en algèbre. Peacock l'exprime en 1833 sous la forme d'un « principe de permanence des formes équivalentes » :

« (A) : N'importe quelle forme qui est algébriquement équivalente à une autre lorsqu'elle est exprimée en symboles généraux continue à être équivalente quel que soit ce que ces symboles désignent. »

« (B) : Proposition réciproque : Toute forme équivalente qui est mise en évidence dans

l'algèbre arithmétique considéré comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente lorsque les symboles sont généraux dans leur nature ainsi que dans leur forme». [Peacock, 1833, p.194]

Il est important de souligner, à propos des opérations, que Peacock, dans le même écrit, les présente non pas individuellement, mais par couples d'inverses :

« Les opérations appelées addition et soustraction sont notées par le signes + et - ; Elles sont inverses l'une de l'autre (. . .) Les opérations appelées multiplication et division sont notées par les signes \times et \div où plus souvent par une position conventionnelle des quantités ou des symboles entre eux. Les opérations appelées multiplication et division sont inverses l'une de l'autre. » [Peacock 1833, p. 196-197]

La voie est ainsi ouverte à une recherche systématique des « formes symboliques » opératoires. Duncan F. Gregory (1813-1844) élabore ainsi un « calcul des opérations », dans lequel cette relation entre heuristique et formalisation ne concerne plus seulement le passage de l'arithmétique à l'algèbre, mais tout transfert d'un domaine formalisé à un autre. Ce qu'il exprime en 1839 par ce « principe de transfert » :

« Tout ce qui est prouvé concernant ces symboles à partir des lois connues de leur combinaison, doit être également vrai de tous les autres symboles qui sont soumis aux mêmes lois de combinaison. » [Gregory 1839, p. 34]

Gregory est disciple de Peacock et l'un des fondateurs en 1837 du Cambridge Mathematical Journal (premier journal anglais consacré aux mathématiques) dont il est le directeur. C'est dans ce même journal que Boole publie, en 1840, son premier article, dont l'objet est la résolution des équations différentielles. Par ses relations et ses contacts, en particulier par l'intermédiaire de son ami Augustus De Morgan (1806-1871), Boole était bien au fait de ces considérations, qui faisaient partie de son « paysage » culturel.

C'est donc dans le droit fil des préoccupations des algébristes anglais qu'il met en place une algèbre nouvelle, dans un cadre où rien de tel n'avait jamais été fait, celui de la logique. On peut cependant concevoir qu'elle ait déconcerté, voire scandalisé, parmi ses contemporains, tous ceux qui n'étaient pas sensibilisés à cette perspective symbolique dont

elle était une des manifestations, aussi bien chez les philosophes que chez les mathématiciens.

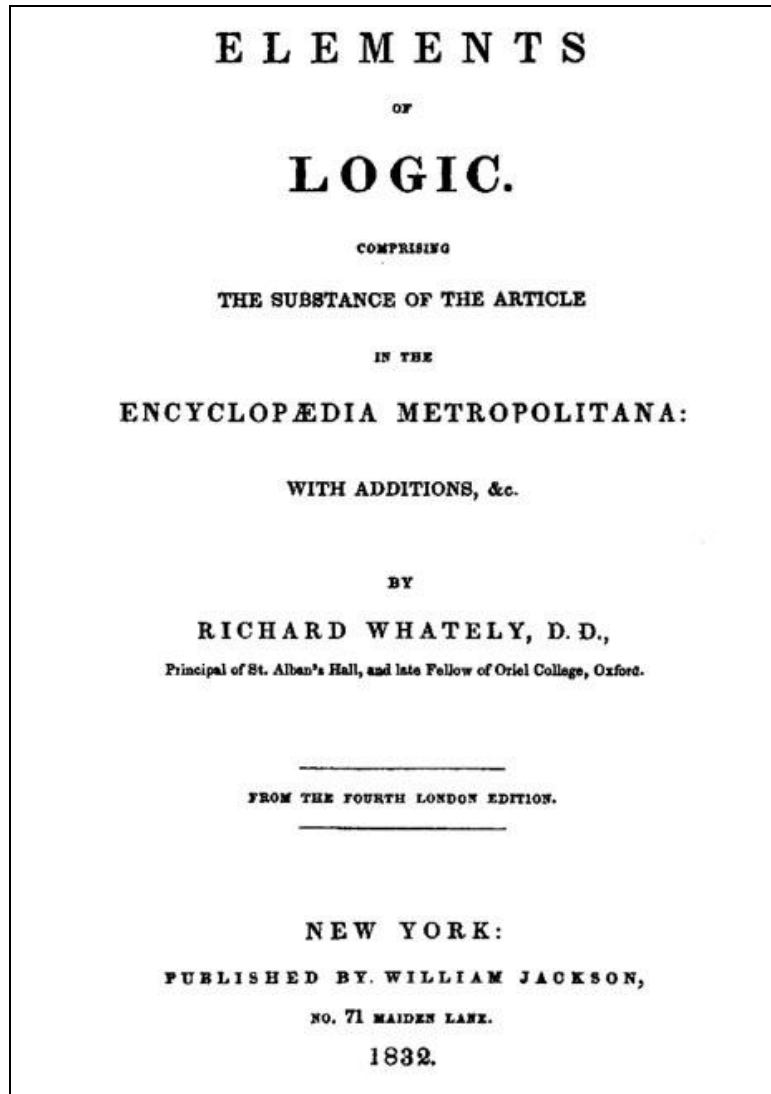
2 – L'héritage de Boole en logique

Concernant la logique au début du XIX^e siècle, son rôle était assez diffus à Cambridge où les mathématiques se sont imposées assez tôt dans les examens écrits de l'université (et nous en avons vu des conséquences). A Oxford par contre, la syllogistique du moyen-âge restait à la base des études. Soumise alors, elle aussi, à de multiples tensions, notamment à travers la compétition entre Oxford et Cambridge, la logique va également évoluer, et de différentes manières. En effet, si à Cambridge les réformateurs tentent d'agir par et à travers les mathématiques, à Oxford c'est sur la logique que porte l'effort de rénovation.

Alors que rien en logique n'avait été publié en Grande Bretagne depuis plus d'un siècle, Richard Whately (1787-1863) fait paraître en 1826 « *Elements of Logic* » et ce traité est suivi seulement un an plus tard de « *Outline of a new System of Logic with a critical examination of Dr Whately's Elements of Logic* » de George Bentham (1800-1884). Bentham, botaniste de formation, est le neveu du célèbre philosophe fondateur de l'utilitarisme, Jeremy Bentham, et se trouve ainsi en contact étroit avec les discussions philosophiques du moment.

Whately enseigne à Oxford l'économie politique, science à cette époque tout à fait nouvelle. Mais pour promouvoir ce nouvel enseignement sans bouleverser le cadre traditionnel, il lui faut composer avec l'état de choses existant, c'est à dire la forte prégnance de la logique traditionnelle comme fondement de l'enseignement. Une des solutions possible est de mettre sur pied une logique pouvant servir de socle aux nouvelles disciplines, dont la sienne.

Figure 1



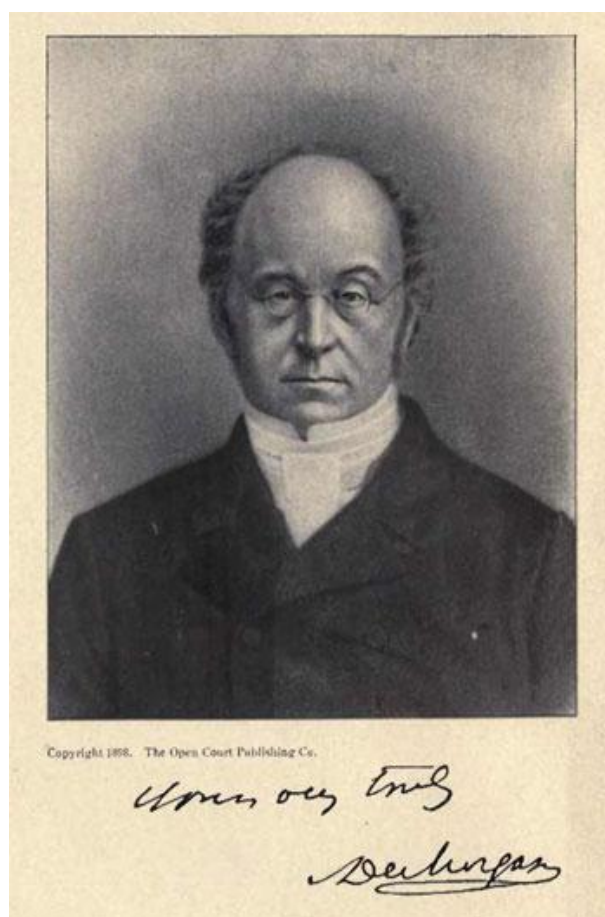
Son traité de logique est orienté dans ce sens, et est, en fait, une œuvre collective, qui contient un lexique des termes d'économie politique, et est préparé pour l'*Encyclopaedia Metropolitana* de Samuel Coleridge (1772-1834). Whately y critique fortement l'enseignement de la logique alors donné à Oxford, du point de vue de son assimilation par un plus grand nombre d'étudiants et qui, à plus d'un siècle de distance, nous a un air de déjà vu :

« *La vérité est que seule une très petite proportion, même parmi les bons étudiants, arrive à tirer profit de la logique; et qu'ainsi la plupart traverse l'université sans rien connaître du tout sur le sujet. Je ne veux pas dire qu'ils n'ont pas appris par cœur une ribambelle de termes techniques, mais qu'ils n'ont absolument rien compris des principes de la science.* »
[Whately 1832, p. xvii]

A de nombreuses reprises il note son désaccord avec Henry Aldrich (1648-1710), dont l'ouvrage en latin « *Artis Logicae Rudimenta* », édité pour la première fois en 1691, était toujours en usage, et le restera encore de nombreuses années.

Son traité peut apparaître comme une tentative parallèle, issue d'Oxford et concernant la logique, aux efforts de la « *Analytical Society* » des amis de Peacock, créée en 1812 par Charles Babbage (1791-1871) pour réformer l'enseignement mathématique. Son importance ne réside pas tant dans son contenu logique (qui ne présente rien de bien nouveau, quoiqu'il tente de donner une vue simple et aisément abordable des bases de la syllogistique pour les étudiants), mais plutôt en ce qu'il est une tentative de fonder la logique sur les lois de la pensée, le tout reposant sur une théorie de l'esprit. Whately insiste sur le caractère formel de la logique, ce qui permet de la rapprocher de l'arithmétique par la similitude des procédures. Ces remarques prennent un sens plus aigu pour notre sujet dès que l'on sait que Boole a étudié la logique dans l'ouvrage de Whately qu'il cite dans *The mathematical analysis of logic*, (1847) qui est sa première intervention en logique. Dans le même opuscule, Boole déclare qu'il a décidé de publier cet essai à la suite de la controverse publique entre Sir William Hamilton (1788-1856) (logicien écossais à ne pas confondre avec William Rowan Hamilton, (1805-1865), l'algébriste irlandais inventeur des quaternions) et De Morgan concernant la quantification du prédicat, chacun réclamant l'antériorité de la nouveauté. Comme on peut remarquer de plus que De Morgan avait été à Cambridge l'élève de Peacock et Whewell, alors que Hamilton a été formé à Oxford, on s'aperçoit que les pièces d'une sorte de puzzle se mettent peu à peu en place, qui se réalisera dans le travail de Boole.

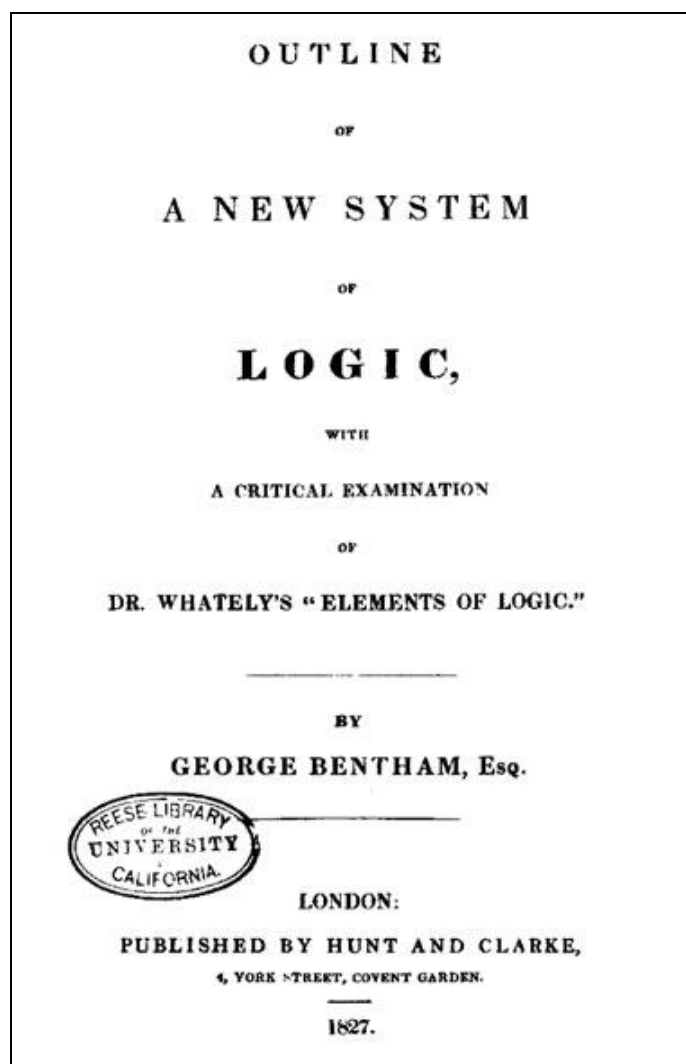
Figure 2



Augustus De Morgan (1806-1871)

Concernant cette controverse, disons simplement que De Morgan quantifie le prédicat dans « *On the Syllogism* » publié en 1846, alors que Hamilton le fait dans son cours à Edinburgh la même année. Boole, qui était en relation épistolaire avec de Morgan, connaissait bien l'affaire et les écrits publics qu'elle produisait. Il est tout à fait vraisemblable que ce fut l'occasion pour lui, en réfléchissant en particulier aux arguments d'Hamilton, (éventuellement a contrario) de mettre au clair des idées qu'il avait déjà sur la logique. En fait, cette polémique entre Hamilton et De Morgan n'aurait jamais dû avoir eu lieu car tous deux avaient été précédés par G. Bentham dans l'ouvrage déjà cité.

Figure 3



Si pour Bentham les propositions sont formées par deux termes, un sujet et un prédicat, reliés par une copule, suivant en cela Aristote, il se démarque de la tradition en considérant que la copule n'a que deux formes possibles, la relation d'identité et la relation de diversité (de non-identité). Il n'y a donc pour lui que deux types de proposition suivant cette remarque : les affirmatives qui identifient sujet et prédicat et les négatives qui manifestent leur distinction. Ceci a pour conséquence que tout le reste, ne concernant pas la copule, doit être inclus dans le nom des termes. De ce fait, et c'est là l'autre point important, les termes sont soit individuels soit collectifs (ce qui correspond à leur 'extend') et ceci qu'ils soient indifféremment sujets ou prédicats. Ce dernier n'est donc plus inaltérable comme l'exigeait la tradition depuis Aristote, mais peut être associé à un signe de quantité.

Figure 4 : Bentham quantifie le prédicat

I have expressed the two terms by the letters X and Y, their identity by the mathematical sign =, diversity by the sign ||, universality by the words *in toto*, and partiality by the words *ex parte*; or, for the sake of still farther brevity, by prefixing the letters t and p, as signs of universality and partiality. These forms are,

- | | | |
|----|--------------------------|-------------|
| 1. | X in toto = Y ex parte | or tX = pY |
| 2. | X in toto Y ex parte | or tX pY |
| 3. | X in toto = Y in toto | or tX = tY |
| 4. | X in toto Y in toto | or tX tY |
| 5. | X ex parte = Y ex parte | or pX = pY |
| 6. | X ex parte Y ex parte | or pX pY |
| 7. | X ex parte = Y in toto | or pX = tY |
| 8. | X ex parte Y in toto | or pX tY |

Ainsi, une proposition: «*consiste en deux termes substantifs avec leur marques respectives d'étendue, et en une copule qui exprime l'identité ou la diversité de ces termes.*» [Bentham 1827, p. 149] En combinant le tout, on obtient huit formes possibles, qui après élimination des doublons se réduisent à cinq.

De Morgan interprète la copule de façon semblable à Bentham : « *is or is not* », ce qui lui permet aussi de quantifier le prédicat. Mais surtout, et cette notion est alors une nouveauté, il fixe un 'univers du discours' auquel sont systématiquement astreints les termes d'une proposition. Il peut introduire ainsi naturellement des « noms négatifs », ce qu'Aristote rejetait absolument. En effet, toute définition d'un terme A découpe automatiquement cet univers du discours en deux parties inséparables : ce qui est A et ce qui n'est pas A, non A (que De Morgan note par la minuscule correspondante, a). Avec chaque terme apparaît donc, comme en creux, sa négation qui lui est toujours co-présente.

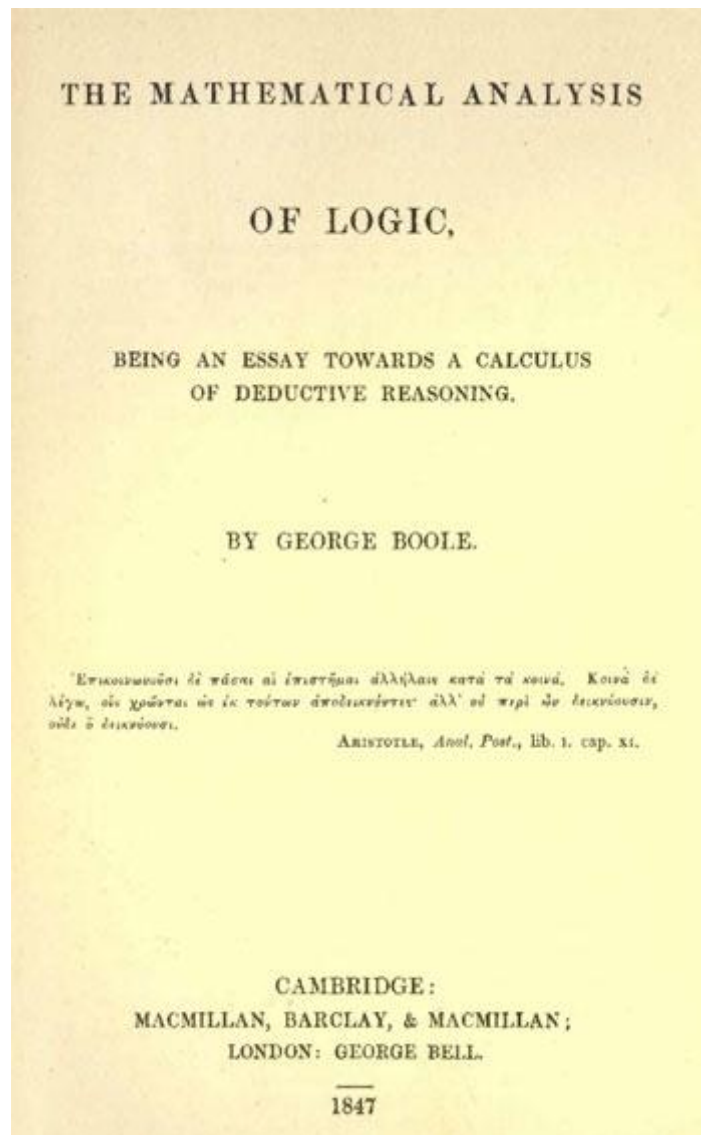
Bentham de son côté, fait une remarque qui va dans ce sens, mais l'intérêt de cette nouveauté lui échappe, faute de s'insérer dans un système : « *Ainsi, dans la proposition 'Les plantes ne sont pas des animaux' la négation doit être considérée comme attachée à la copule car, si, par ce qui est appelé conversio per accidens, nous l'attachons à 'animaux', le terme 'non-animaux' devient adjectif (. . .) et la proposition ainsi réduite devient 'Chaque plante est un être non-animal' Toutes les propositions négatives peuvent ainsi être réduites en affirmatives, mais cela semble être une complication inutile.* » [Bentham 1827, p. 165]

3 - Boole et son travail

Commençons par une biographie très succincte du héros. George Boole est né en 1815 à Lincoln. Son père, cordonnier, avait fabriqué un télescope et invitait les passants, par une affiche apposée sur son échoppe, à venir y contempler les « œuvres de Dieu ». Mais c'était aussi l'un des fondateurs du *Mechanic Institute* de Lincoln dont il était bibliothécaire. Cet *Institute* est l'une des nombreuses associations locales tournées vers l'« histoire naturelle » qui se formèrent à cette époque en Angleterre. C'est là que Boole s'initiera aux langues et aux mathématiques. A douze ans George connaissait le latin et à quatorze traduisait de la poésie grecque dans le journal local. La faillite de son père en 1831 le contraint à subvenir aux besoins de sa famille. Il enseigne dans une petite école, puis en 1838 il dirige un pensionnat à Waddington. Il publie un article sur les équations différentielles dès 1840 dans le *Cambridge Mathematical Journal*, et un de ses articles, « General Method of Analysis », reçoit en 1844 la médaille d'or de la *Royal Society*. En 1849, sans avoir jamais fréquenté aucune université, mais avec de nombreuses recommandations d'enseignants reconnus, l'« autodidacte » obtient la chaire de mathématique du nouveau Queen's College de Cork, en Irlande. Il ne quittera plus ce lieu, où il épouse en 1855 Mary Everest et meurt d'un refroidissement en 1864.

En 1847 Boole publie un petit opuscule de 82 pages, *The mathematical analysis of logic*, dans lequel il donne, pour la première fois dans l'histoire, une description de la logique sous la forme d'un calcul, comme annoncé dans le sous-titre de l'ouvrage : *being an essay toward a calculus of deductive reasoning*.

Figure 5



Le cadre est nettement précisé dès la première phrase de l'introduction qui ne laisse aucun doute: « *Ceux qui sont au fait de l'état actuel de la théorie de l'Algèbre Symbolique sont conscients que la validité des processus d'analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles qui sont employés, mais seulement des lois de leur combinaison. Chaque système d'interprétation qui ne modifie pas la vérité de la relation supposée est également admissible.* » [Boole 1847, p. 3]

Et un peu plus loin: « *C'est sur la base de ce principe général que je propose d'établir le Calcul de la Logique, et que je demande pour lui une place parmi les formes reconnues de l'analyse Mathématique . . .* » [Boole 1847, p. 4]

La Logique devient alors une science revendiquée comme telle : « . . . *Logic considered*

as a Science » [Boole 1847, p. 7] et sa forme est mathématique. Elle représente alors, aux côtés de l'Algèbre, une des possibilités de réalisation de ce que Boole appelle l'Analyse Mathématique.

Sept ans plus tard, c'est une version très complétée (424 pages) et prolongée au calcul des probabilités qui est livrée, dont le titre complet est : « *An investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* ». (*Une recherche des lois de la pensée sur lesquelles sont fondées les théories mathématiques de la logique et des probabilités.*)

Figure 6 : Table des matières de "Laws of Thought"

[vii] CONTENTS		xvi LAWS OF THOUGHT
CHAPTER I		CHAPTER XI
NATURE AND DESIGN OF THIS WORK,	PAGE I	OF SECONDARY PROPOSITIONS, 168
CHAPTER II		CHAPTER XII
SIGNS AND THEIR LAWS,	26	METHODS IN SECONDARY PROPOSITIONS, 188
CHAPTER III		CHAPTER XIII
DERIVATION OF THE LAWS,	43	CLARKE AND SPINOZA, 197
CHAPTER IV		CHAPTER XIV
DIVISION OF PROPOSITIONS,	57	EXAMPLE OF ANALYSIS, 232
CHAPTER V		CHAPTER XV
PRINCIPLES OF SYMBOLICAL REASONING,	72	OF THE ARISTOTELIAN LOGIC, 239
CHAPTER VI		CHAPTER XVI
OF INTERPRETATION,	87	OF THE THEORY OF PROBABILITIES, 257
CHAPTER VII		CHAPTER XVII
OF ELIMINATION,	107	GENERAL METHOD IN PROBABILITIES, 268
CHAPTER VIII		CHAPTER XVIII
OF REDUCTION,	123	ELEMENTARY ILLUSTRATIONS, 292
CHAPTER IX		CHAPTER XIX
METHODS OF ABBREVIATION,	139	OF STATISTICAL CONDITIONS, 311
CHAPTER X		CHAPTER XX
CONDITIONS OF A PERFECT METHOD,	159	PROBLEMS ON CAUSES, 337
		CHAPTER XXI
		PROBABILITY OF JUDGMENTS, 393
		CHAPTER XXII
		CONSTITUTION OF THE INTELLECT, 418

Les *Lois de la Pensée* considéré par beaucoup comme l'avènement de la logique moderne, fut l'objet dès sa parution de critiques diverses sur lesquelles nous reviendrons. Les deux ouvrages cités présentent bien sûr des différences mais qui ne sont pas essentielles dans la mesure où ils correspondent à un même mouvement de pensée, le dernier étant, bien sûr, beaucoup plus abouti. Globalement, il s'agit pour l'auteur de montrer que les raisonnements reposent sur des lois, que ces lois nous sont accessibles et

même maîtrisables car elles peuvent revêtir un aspect de type algébrique ce qui permet de faire apparaître une forme de science mathématique: « *Que la logique, comme science, soit susceptible de larges applications est admis, mais il est également certain que ses formes et processus ultimes sont mathématiques* » [Boole 1854, p. 12] montrant ainsi, d'un ouvrage à l'autre, la continuité de la revendication.

Loin d'être un exposé de calculs se suffisant à eux-mêmes, l'ouvrage de Boole est aussi une prise de position dans les débats précédemment évoqués : elle se traduit par l'importance qu'y prennent les explications et remarques fournies par l'auteur. Le texte est aussi l'expression voulue d'un contenu philosophique.

4 - Le système de Boole

Le système de Boole (revendiqué comme tel par l'auteur) est basé d'une part sur l'écriture systématique de signes (des lettres de l'alphabet) pour désigner des objets, les termes, et d'autre part sur des symboles d'opérations (empruntés à la pratique mathématique) traduisant les combinaisons qui se forment dans la pensée entre ces termes. C'est alors à partir de l'expérience que nous avons du langage que Boole s'attache à mettre des lois en évidence.

En effet, l'esprit nous donne la possibilité de considérer comme formant un tout des objets divers et ainsi de pouvoir leur attribuer un nom collectif, qui peut aussi bien être substantif qu'adjectif. Nous avons affaire avec des opérations de l'esprit, désignées par des lettres minuscules qui sont des « *elective symbols* »; les objets ainsi mis en évidence répondent à un nom et forment une classe désignée par la majuscule correspondante. Boole met alors en place sur ces « *elective symbols* » deux opérations notée multiplicativement et additivement. La conjonction des termes, qui correspond à la juxtaposition des idées, est rendue par le symbole de multiplication et la disjonction, qui traduit le « ou » exclusif, est noté par l'addition. C'est donc l'analyse du langage qui permet de mettre en place un calcul symbolique, justifié par la coïncidence qui apparaît alors avec l'acte de la sélection des classes attribuée à l'esprit. Ces symboles permettent de fonder une « *special algebra* » qui est basée sur trois propriétés fondamentales qui ne sont rien d'autre que la traduction sous forme algébrique des opérations de l'esprit.

D'abord deux propriétés qui font intervenir le « principe de transfert » pour utiliser des transformations algébriques en logique : la « *commutative law* » $xy = yx$ et la « *distributive*

law » $z(x + y) = zx + zy$. Toutes deux sont justifiées par la manière dont notre esprit traite les idées exprimant les propriétés des objets.

La troisième propriété est spécifique de la logique, et vise à montrer que le système booléen est plus essentiel que le système aristotélicien, puisqu'il déduit le « principe de contradiction » d'une loi mathématique plus fondamentale. Cette « *special law* » ou encore « *fundamental law* », issue du mécanisme même de sélection des classes, s'énonce par l'égalité $x^2 = x$. Par exemple si, dans un univers d'animaux, X désigne la classe des chevaux, dont l'*elective symbol* est x , une nouvelle sélection des chevaux correspond à xx , mais ne change rien à la classe X , on a donc toujours $xx = x$.

« *Cet axiome des Métaphysiciens qui est appelé le principe de contradiction et qui affirme qu'il est impossible pour une chose quelconque de posséder une qualité et en même temps de ne pas la posséder, est une conséquence de la loi fondamentale de la pensée dont l'expression est $x^2=x$.* » [Boole 1854, p. 49]

C'est elle qui permet la mise en place de la « *special algebra* » en tant que telle. Boole tire de cette relation, par un calcul algébrique tout à fait élémentaire (transposition et factorisation), la relation qui permet de reconnaître tous les « *elective symbols* », c'est à dire les seuls pertinents en logique car ils vérifient tous la « *law of duality* »: $x(1-x) = 0$ où 1 désigne l'univers du discours, $1-x$ le contraire de x et 0 le rien. On doit remarquer que ce dernier calcul, qui transforme $x^2 = x$ en $x(1-x) = 0$, qui à nos yeux peut sembler infondé, est tout à fait licite pour Boole puisque reposant sur la correspondance entre les calculs formels de l'algèbre et ceux de la logique par-delà toute signification : c'est là un exemple de mise en œuvre du « principe de transfert ».

Mais si la forme semble mathématique, il s'agit bien de logique : « *Concevons, alors, une algèbre dans laquelle les symboles x, y, z etc, admettent indifféremment les valeurs 0 et 1, et seulement ces valeurs. Les lois, les axiomes et les processus d'une telle algèbre doivent être identiques dans toute leur extension avec les lois, les axiomes et les processus d'une Algèbre de la Logique. Seule la différence d'interprétation les distinguera. C'est sur ce principe qu'est établie la méthode du présent ouvrage.* » [Boole 1854, p. 37-38] Il faut remarquer ici que Boole emploie le mot « *axioms* » dans un sens qu'il n'a plus maintenant mais qui était courant au XVIII^e siècle et surtout chez John Locke (1632 - 1704) pour désigner un énoncé résumant un travail d'élaboration issu de l'expérience, sans avoir à refaire toute la démarche à chaque fois. La logique ici construite par Boole est bien fondée

sur l'expérience et n'est absolument pas axiomatique, puisque nous avons vu qu'il tire de nos habitudes de penser les bases de son calcul.

De fait, il apparaît que la ligne philosophique suivie par Boole (mais aussi par l'École Algébrique Anglaise), est sous-tendue par celle exposée par l'empiriste Locke en 1690 dans *Essay concerning Human Understanding*. Tout ce que ce dernier développe concernant le langage, en particulier la notion d'arbitraire du signe, sa théorie de la connaissance, sa conception de la vérité, les conditions d'équilibre de la société humaine, ses vues sur le rôle de la science et la place qu'il donne aux mathématiques et en particulier à l'algèbre, est bien connu des amis de Peacock et c'est très naturellement qu'ils vont y trouver un cadre pour y ancrer leur action réformatrice. Et lorsqu'il expose ses idées philosophiques sur les origines de ses calculs, ou bien les rapports entre logique et mathématiques, et plus généralement sur les sciences, Boole reprend très souvent des idées issues de Locke sans que cela soit explicitement mentionné.

Si, pour nous, un calcul du type de celui exposé par Boole est bien familier dans le contexte des classes, il faut encore une fois souligner que les symboles sur lesquels cette algèbre opère représentent des opérations de l'esprit. On comprend que ceci ne devait pas paraître évident à ceux de ses contemporains pour qui l'algèbre concernait des quantités, et qu'une telle présentation marque une rupture considérable dans l'histoire à la fois de la logique et des mathématiques.

Cette algèbre de la logique mise en place, très soigneusement, sur une telle base doit au moins permettre la traduction de la syllogistique traditionnelle, ce dont Boole se préoccupe. Mais au-delà de l'efficacité à rendre compte de l'existant, Boole montre aussi la supériorité de son système dont les calculs algébriques permettent la résolution de problèmes complexes qui dépassent les capacités des méthodes habituelles. Ainsi le système exposé est bien un système de logique, ce qui n'allait pas de soi vu sa forme, qui dépasse à travers son fonctionnement, la méthode alors classique d'exposition.

Ce fonctionnement n'est pas pour nous surprendre, puisqu'il fait partie de notre culture. Il s'agit de traduire le problème logique sous la forme de relations entre les « *elective symbols* », puis de procéder sur ceux-ci aux calculs nécessaires dans la « *special algebra* », sans s'occuper d'une quelconque référence à la signification des symboles, mais en suivant scrupuleusement les règles de calcul, pour à la fin seulement, donner une interprétation sémantique des résultats obtenus. Pour cela, le résultat doit être mis préalablement sous une forme interprétable. Les calculs intermédiaires peuvent bien sûr varier en fonction de la question posée, et donc du résultat recherché, mais globalement, il s'agit toujours

d'élimination de termes. En effet, le syllogisme type permet de former une conclusion à partir de deux prémisses en procédant à l'élimination du terme commun (lorsque c'est possible). Ce qui correspond, au niveau du calcul sur les symboles, à résoudre un système d'équations en éliminant des inconnues. Et c'est à cela que Boole s'emploie systématiquement.

Précisons les deux moments nécessaires à ce fonctionnement, que Boole met en évidence, discute et illustre par des exemples. Il les nomme d'une part le développement des expressions et d'autre part la méthode d'élimination.

A) Le Développement

Toute expression f , contenant un symbole logique, x par exemple, peut s'écrire sous la forme : $f(x) = ux + v(1-x)$ car tout individu de l'univers possède ou ne possède pas la propriété x . En donnant à x les valeurs successives 0 et 1, Boole obtient : $f(x) = f(1).x + f(0).(1-x)$, qui est en quelque sorte son écriture standard. Ce développement, qui va permettre ensuite l'interprétation, fonctionne aussi pour plusieurs variables, par exemple pour deux variables, sur le modèle :

$$f(x,y) = f(1,1).xy + f(1,0).x(1-y) + f(0,1).(1-x)y + f(0,0).(1-x)(1-y), \text{ etc } \dots$$

Une expression de n variables s'écrira ainsi à l'aide de 2^n 'constituants' correspondant à : « *the several exclusive divisions of the universe of discours* ». [Boole 1864, p. 81]

Par exemple, si $f(x,y) = 1 - x + xy$, son développement est : $xy + (1 - x)y + (1 - x)(1 - y)$, puisque les 'coefficients' sont respectivement 0, 1, 1 et 1.

Dans son texte de 1847, c'est à partir de la formule de Taylor appliquée à la fonction f que Boole met en évidence cette écriture, ce qui est peut-être à l'origine de la dénomination, mais en 1854 il abandonne cette méthode.

Cette forme étant obtenue, Boole peut alors résoudre des équations, en remarquant que, compte tenu de la loi fondamentale $x^2 = x$, elles sont toutes du premier degré. Pour celles qui sont du type du type : $V = 0$, la résolution se fait en annulant tous les constituants dont les coefficients ne sont pas nuls, les autres équations pouvant, plus ou moins facilement, se ramener à cette forme.

Figure 7 : Le développement booléen des fonctions

Assume then,

$$f(x) = ax + b(1 - x),$$

and making $x = 1$, we have

$$f(1) = a.$$

Again, in the same equation making $x = 0$, we have

$$f(0) = b.$$

Hence the values of a and b are determined, and substituting them in the first equation, we have

$$f(x) = f(1)x + f(0)(1 - x); \quad (1)$$

as the development sought.* The second member of the equation [73] adequately represents the function $f(x)$, whatever the form of that function may be. For x regarded as a quantitative symbol admits only of the values 0 and 1, and for each of these values the development

$$f(1)x + f(0)(1 - x),$$

assumes the same value as the function $f(x)$.

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x(1 - y) + f(0, 1)(1 - x)y + f(0, 0)(1 - x)(1 - y), \quad (5)$$

[75] $f(x, y, z) = f(1, 1, 1)xyz + f(1, 1, 0)xy(1 - z) + f(1, 0, 1)x(1 - y)z + f(1, 0, 0)x(1 - y)(1 - z) + f(0, 1, 1)(1 - x)yz + f(0, 1, 0)(1 - x)y(1 - z) + f(0, 0, 1)(1 - x)(1 - y)z + f(0, 0, 0)(1 - x)(1 - y)(1 - z),$

in which $f(1, 1, 1)$ represents what the function $f(x, y, z)$ becomes when we make therein $x = 1, y = 1, z = 1$, and so on for the rest.

B) La Méthode d'Elimination

Toute équation $f(x) = 0$ est équivalente à $f(1).f(0) = 0$ où la lettre x n'apparaît pas, ce qui s'étend aisément à plusieurs variables. Boole prend la peine de donner trois démonstrations

de ce fait, en insistant sur le rôle qui y est joué par la loi fondamentale.

(La troisième est exposée dans l'**Annexe 1**)

On peut ainsi éliminer, à volonté, une ou plusieurs variables quelconques d'une équation. Concernant les systèmes, comme ils se ramènent à des équations simples, on peut les résoudre par les mêmes méthodes. C'est donc sur ces deux procédés en apparence très simples que repose toute la méthode exposée par Boole. (Un exemple simple figure dans l'**Annexe 1**.)

Concernant les propositions secondaires, dont les termes sont eux-mêmes des propositions (par exemple « *Il est vrai que le soleil brille* » ou encore « *Si le soleil brille le jour sera plaisant* »), Boole utilise comme marqueur le temps durant lequel elles sont vraies, qui joue alors le rôle de variable :

« . . . que x représente un acte de la pensée par lequel nous fixons notre regard sur cette portion du temps pour laquelle la proposition X est vraie ; et que ce soit cette signification qui soit comprise lorsqu'il est dit que x dénote [souligné par Boole] le temps durant lequel la proposition X est vraie. (. . .) Nous appellerons x le symbole représentatif [souligné par Boole] de la proposition X . » [Boole 1854, p. 165]

Il montre alors qu'avec ce point de vue, son système symbolique fonctionne encore dans le cadre étendu des propositions secondaires.

Poursuivant dans la même voie d'analyse, la seconde partie des *Lois de la pensée* traite, durant six chapitres, des probabilités. A cet effet, Boole procède au remplacement d'un événement probabiliste par la proposition qui affirme qu'il se produit :

« Ainsi, plutôt que de considérer la fraction numérique p comme exprimant la probabilité de réalisation d'un événement E , voyons-la comme représentant la probabilité de la vérité de la proposition X , qui affirme que l'événement E se produit. » [Boole 1854, p. 248]

A partir de là, son système symbolique est à même de traiter des probabilités puisqu'il s'est en quelque sorte 'ramené au cas précédent'.

Il apparaît donc, à travers les *Lois de la pensée*, que Boole a construit un système de calculs symboliques capable non seulement de rendre compte de la logique aristotélicienne sous forme d'un calcul de classes, mais aussi d'aller au-delà en traitant des problèmes qui

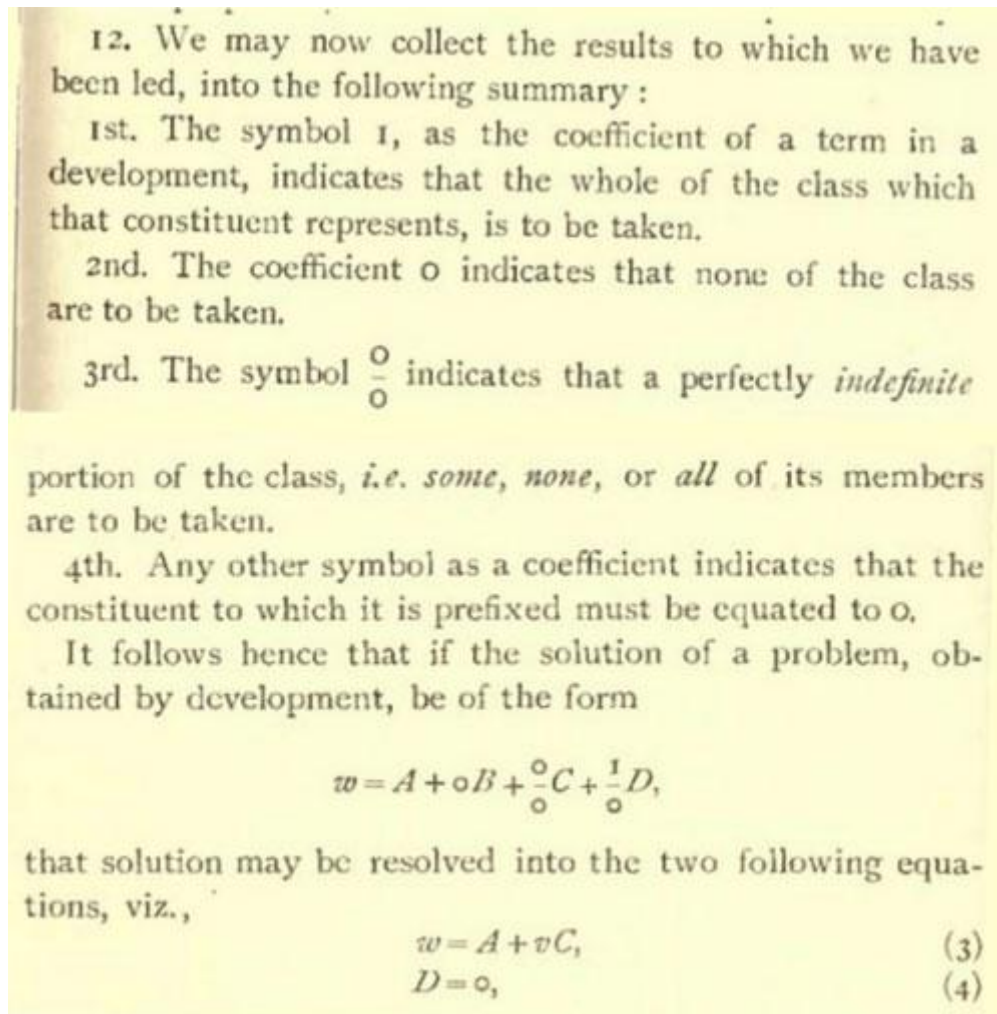
dépassent les compétences de la syllogistique comme le calcul des propositions, et encore de s'appliquer à une théorie 'moderne', les probabilités. Il est donc parvenu à unifier grâce à sa *special algebra* le traitement de questions jusqu'alors considérés comme relevant de techniques distinctes.

5 – Des problèmes

Il n'en reste pas moins que des critiques lui seront faites sur trois points principaux. Les deux premiers, sur lesquels nous reviendrons ultérieurement, sont d'une part l'intervention d'une addition sous forme exclusive, donc non définie pour des classes quelconques, et d'autre part la traduction systématique des problèmes sous la forme d'équations. Nous avons vu que leur résolution se fait par les méthodes dont dispose Boole, c'est à dire les ressources du calcul algébrique. Mais il s'introduit alors, 'naturellement' lors des développements d'expressions en suivant les règles de calcul, des coefficients à l'allure étrange.

En effet, si l'on cherche l'expression de w dans la forme $Ew + E'(1-w) = 0$, on obtient un quotient : $w = E^2/(E^2 - E)$. Cette expression contient un dénominateur qui ne disparaît pas lors d'un éventuel développement suivant une autre variable (en appliquant la méthode qui a été décrite), mais au contraire, 'se répand' pour donner l'écriture d'allure invraisemblable : $w = 1/1 A + 0/1 B + 0/0 C + 1/0 D$. C'est le troisième point de critique, l'apparition éventuelle de ce qui nous apparaît comme des 'monstres' : les si surprenants et 'scandaleux' coefficients $1/0$ et $0/0$, puisque l'on peut considérer que, même si, logiquement, les écritures $1/1$ et $0/1$ n'ont aucun sens, elles peuvent, algébriquement, faire illusion. (Ce phénomène se produit dans la démonstration de l'équivalence entre $f(x) = 0$ et $f(1)f(0) = 0$ exposée dans l'**Annexe 1**.)

Figure 8 : Les monstres de Boole et comment l'auteur s'en accommode



Pour Boole, qui suit en cela Peacock, ces productions, issues des règles de calcul, sont parfaitement admissibles, car un symbole peut ne pas avoir d'interprétation. Il est alors confronté au problème du sens à donner à ces résultats spécifiques, et, quittant l'algèbre, retourne à la logique des classes pour interpréter ce résultat. Il conclut qu'il faut prendre toute la classe A, rien de la classe B et une partie arbitraire de la classe C, avec la condition que D doit être nul. Cette interprétation est conforme au calcul ordinaire : $1/1 = 1$, $0/1 = 0$, $1/0$ impossibilité et $0/0$ indéterminé. La solution du développement est donc donnée par les deux expressions conjointes: $D = 0$ et $w = A + vC$, où v est un symbole de classe quelconque. Il n'est pas surprenant que les incompréhensions et les critiques aient alors été nombreuses, non sur le résultat qui est tout à fait correct, mais sur la méthode qui a pu

sembler pour le moins obscure. De plus, le symbole v , qui fonctionne comme un quasi-quantificateur, pose problème et a soulevé de nombreuses interrogations quant à son statut. Rappelons que, même s'il connaît bien la logique scolastique, Boole n'est pas principalement logicien ; ses autres articles traitent principalement des méthodes de résolution d'équations différentielles et ce sont ses habitudes de calcul qu'il fait fonctionner en logique. En particulier il semble pour lui naturel de trouver des constantes arbitraires lors des résolutions de problèmes.

Nous avons vu les opérations algébriques être, pour les algébristes anglais d'alors, considérées conjointement avec l'opération inverse. C'est une explication possible de l'addition 'exclusive' utilisée par Boole, un autre choix ne lui permettant pas de préserver la soustraction, inséparable pour lui de l'addition. C'est aussi l'utilisation de la division, inverse de la multiplication, qui produit les coefficients 'monstrueux' sur lesquels il sera attaqué. Mais comment peut-il résoudre des équations, puisque c'est le cadre dans lequel il a déplacé la logique, sans soustraire et diviser, c'est à dire utiliser les ressources de l'algèbre ? Globalement, de ce point de vue, le système semble bien tout à fait cohérent.

On remarquera aussi que Boole, même si son addition est exclusive, peut au besoin considérer les objets de deux classes non disjointes, X et Y par exemple, ce qu'il traduit sur les « *elective symbols* » par une somme exclusive : $x + y(1-x)$ ou sous une forme plus décomposée qu'il dit préférer : $xy + x(1-y) + (1-x)y$, d'une manière tout à fait correcte et cohérente. Mais il ne peut envisager, ce qui n'aurait aucun sens pour lui, d'écrire $x + x$, et trouver ainsi l'idempotence de l'addition logique telle que nous la connaissons, car cette opération n'est pas la sienne. On constate alors que Boole passe, techniquement de très peu, à côté de la structure de calcul qui se nommera plus tard « algèbre de Boole ». Mais en même temps, il en est très loin conceptuellement dans la mesure où son approche est entièrement sous-tendue par une vision de type arithmétique d'écriture puis de résolution d'équations.

Dans le contexte où se trouvait, il semble clair que l'utilisation de l'égalité dans la logique n'est pas due à une décision arbitraire et personnelle de Boole, mais qu'elle lui paraît naturelle et conforme à ses habitudes de travail à travers le principe de transfert. Mais il y a d'autres avantages à ce choix, qui sont d'ordre logique. Nous avons vu comment le choix de cette égalité comme copule universelle conduit, par souci de cohérence et de symétrie à la quantification du prédicat. Ce dernier n'a alors plus rien qui le distingue fonctionnellement du sujet et bénéficie donc du même statut et se trouve ainsi susceptible d'un traitement similaire. Mais de plus, la fixation d'un univers du discours par De Morgan

donne la possibilité de redoubler la symétrisation sujet-prédicat par une autre symétrisation, qui fonctionne au niveau de chaque terme, puisque toute définition d'un terme produit alors systématiquement un deuxième terme : sa négation qui est tout aussi légitime.

Ce point repose fortement sur la conception extensive de la définition des objets logiques dont se manifeste ici l'importance. On pourrait penser que ceci n'est pas fondamental car en changeant le sens de la relation de dépendance entre le sujet et le prédicat pour donner la version intensive correspondante, on obtient un résultat, certes différent, mais en fait complètement symétrique. Les deux points de vue, extensif et intensif, seraient alors interchangeables et adopter l'un ou l'autre ne dépendrait que de la sensibilité personnelle de chacun. C'est ne pas tenir compte du fait qu'une vision intentionnelle est incompatible avec un univers du discours, et donc empêche un traitement de type de celui mis en place par Boole. En effet, les propriétés susceptibles de définir un objet sont formulées au niveau du langage et sont à ce titre totalement indéfinies : on peut toujours en faire apparaître de nouvelle, même si elles n'ajoutent rien à ce que l'on sait déjà. Il n'en va pas de même pour les classes qui, dès qu'elles sont définies, le sont une fois pour toutes. Des extensions égales peuvent correspondre à des propriétés, donc des intentions totalement étrangères, remarquait John Venn (1834-1923), pour qui la vision intensive restait dans le domaine des potentialités, l'extensif seul traitant des réalités. Rappelons que si Aristote rejetait les noms négatifs de son système c'est bien parce que la vision intentionnelle ne peut gérer efficacement la négation. Au début du XX^e siècle, Couturat niait qu'un traitement de type intensif puisse d'une manière quelconque permettre de déboucher sur une automatisation du fonctionnement logique.

On conçoit donc que le passage à une conception extensive des objets traités soit une des conditions principales de la réussite de l'entreprise booléenne. Or c'est une quasi nouveauté alors dans le monde de la logique, mais une habitude en mathématiques et encore une fois, Boole n'était pas logicien mais mathématicien.

6 – En guise de bilan

A proprement parler, ce qu'il fait n'est pas une algébrisation de la logique comme on le trouve souvent mentionné, bien que cela puisse à première vue paraître tel, mais bien

précisément la mise en évidence qu'une forme d'algèbre peut traiter systématiquement, rapidement et sans erreur, les problèmes posés par la logique. En effet, son point de départ n'est pas la logique, qui pour lui n'est qu'un point d'ancrage, mais l'algèbre dont il s'agit d'explicitier les formes d'intervention qui ne sauraient se confiner aux nombres: « *Il n'est pas dans l'essence de la mathématique d'être adéquat avec les idées de nombre et de quantité.* » [Boole 1854, p. 12] Si la logique change, c'est aussi parce que l'algèbre est vue autrement.

Dans le même temps, si la logique intervient, c'est parce que son statut comme celui de l'algèbre était alors fortement en débat. Boole s'est trouvé au confluent de problèmes complexes qu'il a traduit avec les connaissances et les possibilités dont il disposait, à une époque où beaucoup de choses évoluaient dans les domaines scientifiques.

On voit aussi que dans ce qui a précédé Boole, si peu à peu les choses ont évolué selon les intervenants, une lente maturation rapprochant la logique des mathématiques, finalement, ce dont Boole a profité techniquement pour construire son système, se trouve parmi les dernières avancées, en particulier celles de son ami De Morgan. Si cette première tentative de calculs logiques présente des défauts techniques graves, inscrits dans son origine, que les successeurs de Boole s'efforceront de corriger, il n'en reste pas moins qu'elle atteint le but que son créateur lui avait fixé de résolution des problèmes.

Bibliographie

Bentham, George (1827). *Outline of a new System of Logic with a critical examination of Dr Whately's Elements of Logic*, Ed. Hint & Clarke, Londres.

Boole, George (1847). *The mathematical analysis of logic*, Ed. MacMillan, Londres.

Boole, George (1854). *An investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Ed. Walton & Maberley, Londres.

Gregory, Duncan F. (1839). "On the solution of linear differential equations with constant coefficients", *Cambridge Mathematical Journal*, Vol 1, p. 25-36. Reprint : *Mathematical writings*, Cambridge, 1865, p. 14-17.

Durand-Richard, Marie-José (1996). "L'école algébrique anglaise et les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance", in *L'Europe mathématique*, Ed. de la M. S. H., p. 445-477.

Peacock, George (1833). "A report on a recent progress and actual state of certain branches of analysis", *Proceeding of the third meeting of the British Association for the Advancement of Science*, Londres.

Whately, Richard (1826). *Elements of Logic*, Londres. Réédition W. Jackson, New York, 1832.

Annexe 1 : Exemples de calculs de Boole

L'équivalence entre $f(x) = 0$ et $f(1)f(0) = 0$

Nous exposons la troisième des démonstrations données par Boole, qui est la plus « booléenne » d'inspiration. [Boole 1854, p. 102-103]

Partant de $f(x) = 0$, Boole développe $f(x)$ sous la forme $f(1)x + f(0)(1 - x)$, ce qui lui fournit l'équation :

$$f(1)x + f(0)(1 - x) = 0.$$

Il la multiplie alors par x , puis par $1-x$, ce qui lui donne successivement :

$$f(1)x = 0 \quad \text{et} \quad f(0)(1 - x) = 0$$

(Rappelons que $x(1 - x) = 0$, $xx = x$ et $(1 - x)(1 - x) = (1 - x)$ d'après la loi fondamentale.)

Il développe alors ces deux relations en fonction de x , obtenant :

$$f(1) = 0/x = (0/0)(1 - x) \text{ et} \\ f(0) = 0/(1 - x) = (0/0)x.$$

Il interprète alors ces équations :

1°) Aucun individu de la classe représentée par $f(1)$ n'est un x .

2°) Tous les individus de la classe représentée par $f(0)$ sont des x .

Ceci montre qu'aucun individu n'est à la fois dans la classe $f(1)$ et dans la classe $f(0)$, par conséquent $f(1)f(0) = 0$.

Une résolution de problème simple

Voici l'un des nombreux exemples plus ou moins simples que Boole donne du fonctionnement de son système, prouvant ainsi son efficacité dans la résolution de problèmes. [Boole 1854, p. 63-64 et p. 105-106]

On considère la proposition « Aucun homme n'est placé en position élevée et exempt de regards envieux ».

On note « hommes » par y , « placé en position élevée » par x et « exempt de regards envieux » par z . La classe décrite par « placé en position élevée » et « exempt de regards envieux » s'exprime par xz et la classe contraire par $1 - xz$. C'est à cette dernière que tous les hommes sont assujettis, de sorte que l'expression symbolique correspondante est :

$$y = v(1 - xz), \text{ où } v \text{ est un symbole de classe indéterminée.}$$

Si la proposition avait été exprimée sous la forme équivalente : « Les hommes placés en position élevée ne sont pas exempt de regards envieux », son expression aurait été :

$$yx = v(1 - z).$$

[On doit remarquer ici que Boole utilise, sans aucun commentaire, le même symbole v dans les deux expressions, alors qu'il n'y a aucune raison pour que la classe désignée par v soit la même dans les deux cas. C'est une des manifestations de l'ambiguïté de ce symbole dont le statut est imprécis, ce qui lui sera reproché, et qui fonctionne chez Boole comme un quasi-quantificateur.]

On obtient ainsi deux expressions symboliques différentes pour une même affirmation.

Pour montrer leur équivalence, il suffit d'éliminer le symbole v dans chacune.

La première équation est : $y - v(1 - xz) = 0$ (par transposition). En faisant successivement $v = 1$ puis $v = 0$ pour multiplier ensuite les résultats entre eux, on obtient :

$$(y - 1 + xz)y = 0, \text{ ou encore } yxz = 0 \text{ (après distributivité).}$$

La seconde équation est : $yx - v(1 - z) = 0$. Le même procédé donne :

$$(yx - 1 + z)yx = 0 \text{ c'est à dire } yxz = 0, \text{ comme précédemment.}$$

Annexe 2 : Les textes des citations

George Peacock

[Peacock 1833, p. 194]

A: Whatever form is algebraically equivalent to another when expressed in general symbol, must continue to be equivalent whatever those symbols denote.

B: Converse Proposition : Whatever equivalent form, is discoverable in arithmetical algebra considered as the science of suggestion, when the symbols are general in their form, though specifics in their value, will continue to be an equivalent form when the symbols are general in their nature as well as their form.

[Peacock 1833, p. 196-197]

The operations called addition and subtraction are denoted by the signs + and - ; They are the inverse of each other. (. . .) The operations called multiplication and division are denoted by the signs \times and \div , or more frequently by a conventional position of the quantities or symbols which respect to each other.(. . .) The operations called multiplication and division are the inverse of each other.

Dunkan F. Gregory

[Gregory 1839, p. 34]

Whatever is proved of the latter symbols, from the known laws of their combination, must be equally true of all other symbols which are subjects to the same laws of combination.

Richard Whately

[Whately 1832, p. xvii]

The truth is, that a very small proportion, even of distinguish students, ever become proficient in logic ; and that by far the greater part pass through the University without

knowing anything at all of the subject. I do not mean that they have not learned by rote a string of technical terms; but that they understand absolutely nothing whatever of the principles of the science.

George Bentham

[Bentham 1827, p. 149]

(...) consists of two substantive terms with their respective signs of extend, and of a copula, expressive of the identity or diversity of those terms.

[Bentham 1827, p. 165]

Thus, in the proposition 'Plants are not animals', not must be considered as attached to the copula; for, if we were, by what is called conversio per accidens, to attach the not to animals, the term not-animals becomes adjective (. . .) and the proposition thus reduced becomes : 'Every plant is a being-not-animal'. All negative propositions might thus be reduced to affirmatives; but it appears to be a useless complication.

George Boole

[Boole 1847, p. 3]

Who are acquainted with the present state of the theory of Symbolical Algebra, are aware that the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination. Every system of interpretation which does not affect the truth of the relation supposed, is equally admissible.

[Boole 1847, p. 4]

It is upon the foundation of this general principle, that I purpose to establish the Calculus of Logic, and that I claim for it a place among the acknowledged forms of Mathematical analysis.

[Boole 1854, p. 12]

That Logic, as a science, is susceptible of very wide applications is admitted; but it is equally certain that its ultimate forms and processes are mathematical.

[Boole 1854, p. 49]

That axiom of Metaphysicians which is termed the principle of contradiction and which affirms that it is impossible for anything to possess a quality, and in the same time not to possess it, is a consequence of the fundamental law of thought, whose expression is $x^2=x$.

[Boole 1854, p. 37-38]

Let us conceive, then, of an algebra in which the symbols x, y, z etc. admit indifferently of the values 0 and 1, and of these values alone. The laws, the axioms, and the processes, of such an Algebra will be identical in their whole extent with the laws, the axioms, and the processes of an Algebra of Logic. Difference of interpretation will alone divide them. Upon this principle the method of the following work is established.

[Boole 1854, p. 165]

Let x represent an act of the mind by which we fix our regard upon that portion of time for which the proposition X is true; and let this meaning be understood when it is asserted that x denote the time for which the proposition X is true. (. . .) We shall term x the representative symbol of the proposition X .

[Boole 1854, p. 248]

Thus, instead of considering the numerical fraction p as expressing the probability of the occurrence of an event E , let it be viewed as representing the probability of the truth of the proposition X , which asserts that the event E will occur.

[Boole 1854, p. 12]

It is not of the essence of mathematics to be conversant with the ideas of numbers and quantity.