$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ EST IRRATIONNEL

SANDRO FRANCESCHI, FANGZHOU JIN
ET JOËL MERKER

RÉSUMÉ. La fonction zêta de Riemann, définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (pour $\mathrm{Re}\, s > 1$), intéresse les mathématiciens depuis longtemps, et elle est encore à l'heure actuelle très étudiée, car cette fonction est fortement liée aux propriétés des nombres premiers. Dans ce texte issu d'un Mémoire de M1, nous étudions quelques propriétés arithmétiques et algébriques des valeurs de $\zeta(s)$ aux points entiers $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, telles que l'irrationalité ou la transcendance. Notamment, nous fournissons une démonstration complète et élémentaire, due à Beukers, du théorème d'Apéry (1978) selon lequel $\zeta(3)$ est irrationnel ; cette démonstration est tout à fait accessible à un étudiant de Licence ou de classe préparatoire.

1. INTRODUCTION

La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, pour les valeurs complexes $s \in \mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}(s) > 1$, par la série :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s},$$

qui converge absolument, d'après le principe de comparaison d'une somme avec une intégrale. Classiquement, on démontre (voir la Section 2) que cette fonction $s \mapsto \zeta(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un unique pôle au point $s = 1$ qui est simple.

Cette fonction $\zeta(s)$ est en fait très étroitement liée aux propriétés des nombres premiers. Tout d'abord, Euler en a établi une représentation fondamentale sous la forme d'un produit infini :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

qui converge absolument lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ensuite, après des décennies d'explorations numériques et de résultats intermédiaires dûs à Legendre, Gauss, Tchebychev et d'autres, Hadamard et de la Vallée Poussin sont parvenus à démontrer le célèbre :

Théorème des nombres premiers. *Soit $\pi(x)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre réel $x \geqslant 1$. Alors quand x tend vers l'infini, la fonction $x \mapsto \pi(x)$ se comporte asymptotiquement comme :*

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}.$$

La démonstration repose essentiellement sur le fait que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$. Dans [12], Zagier élabore une preuve complète et très concise (en trois pages !) de ce théorème en utilisant une simplification essentielle due auparavant à Newmann.

Un des grands problèmes mathématiques encore ouverts actuellement sur la fonction zêta est l'*Hypothèse de Riemann* : les zéros de la fonction zêta dans la *bande critique* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ seraient tous situés sur la *droite critique* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Tests numériques et arguments théoriques confirment cette attente. On peut montrer que l'hypothèse de Riemann est équivalente à une estimation fine des oscillations entre $\pi(x)$ et son asymptotique :

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} = \mathrm{O}\big(\sqrt{x}\log x\big).$$

Un autre aspect de la recherche sur la fonction zêta porte sur l'étude de l'irrationalité de ses valeurs aux entiers naturels. Or aux entiers pairs $2n$

(avec $n \geqslant 1$), les valeurs $\zeta(2n)$ sont connues depuis les travaux d'Euler dans les années 1730, ce sont des multiples rationnels de puissances paires de π :

$$\zeta(2n) \in \pi^{2n}\mathbb{Q} \qquad {\scriptstyle (n\geqslant 1)},$$

comme on le redémontrera p. 5 ci-dessous. Lindemann a montré en 1882 que π est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune équation algébrique $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ à coefficients rationnels $a_j \in \mathbb{Q}$ dont π soit racine. Il en découle que les $\zeta(2n)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, donc *a fortiori* irrationnels.

L'inaccessibilité des zêtas impairs $\zeta(2n+1)$, durant plus de deux cents ans, avec les techniques eulériennes de développements en séries ou produits infinis, fait partie des phénomènes les plus intrigants de l'arithmétique. Pour les valeurs de zêta aux entiers impairs, le premier résultat n'a en effet été obtenu qu'en 1978 [1].

Théorème [APÉRY]**.** *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

Toutefois, jusqu'à aujourd'hui, on ne sait démontrer d'aucun autre $\zeta(2n+1)$ (pour $n \geqslant 2$) qu'il soit irrationnel ! Heureusement, des résultats moins forts, mais d'apparence similaire, ont été établis :

- En 1979, Gutnik a montré dans [7] que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, au moins un des deux nombres suivants est irrationnel :

$$3\zeta(3) + q\,\zeta(2), \qquad \zeta(2) + 2q\log(2).$$

- En 1981, Beukers a montré dans [4] que les deux ensembles suivants contiennent chacun au moins un nombre irrationnel :

$$\left\{\frac{\pi^4}{\zeta(3)},\ \frac{7\pi^4\log(2)}{\zeta(3)} - 15\pi^2,\ \frac{7\pi^6}{3240\zeta(3)} - \zeta(3)\right\},$$

$$\left\{\frac{\zeta(3)}{\pi^2},\ \frac{\zeta(3)^2}{\pi^2} - \frac{\pi^4}{360},\ \zeta(3)\pi^2 - 30\zeta(5),\ \frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\pi^2} - \frac{\pi^6}{2268}\right\}.$$

- Plus récemment, en 2001, Zudilin a montré dans [13] qu'au moins un nombre parmi $\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)\}$ est irrationnel.

Au lieu de considérer chaque $\zeta(2n+1)$ séparément, il est possible d'en considérer simultanément une collection finie. Voici un théorème datant de 2001 :

Théorème [RIVOAL]**.** *Il existe une infinité de nombres irrationnels parmi* $\{\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \ldots\}$

1. Voir [1] pour la publication par l'auteur, qui est postérieure aux articles de Beukers, de Van der Poorten et de Cohen.

Eu égard à ces résultats qui sont considérés comme partiels par les experts, on a la conjecture suivante, bien qu'elle soit complètement hors de portée avec les techniques actuelles :

Conjecture. Les nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Autrement dit, pour tout entier $n \geqslant 0$, il n'existe pas de polynôme $P = P(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ non identiquement nul à coefficients rationnels tel que $P\big(\pi, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2n+1)\big) = 0$.

2. Généralités sur la fonction ζ de Riemann

Prolongement analytique de la fonction ζ Avant de commencer, signalons au lecteur qu'il trouvera dans [5, 6] des informations plus complètes sur les propriétés élémentaires — rappelées ici brièvement — des fonctions $\zeta(s)$ et $\Gamma(s)$. Rappelons que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, la série $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ est bien définie car elle converge absolument, et sa somme définit une fonction holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$. Notre premier objectif est de montrer que cette fonction se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} \backslash \{1\}$.

On définit la *fonction* Γ *d'Euler* par :

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, \mathrm{d}t,$$

où l'intégrale converge normalement sur tout compact contenu dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. Par intégration par parties, on vérifie qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, laquelle permet de prolonger la fonction Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui a pour seuls pôles des entiers négatifs ou nuls.

Lemme 2.1. *Lorsque* $\mathrm{Re}(s) > 1$*, le produit* $\zeta(s)\Gamma(s)$ *est donné par la formule :*

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Pour $t > 0$, on a le développement en série géométrique :

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

En multipliant le tout par t^{s-1}, en intégrant terme à terme, en utilisant :

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}\, t^{s-1}\, \mathrm{d}t = n^{-s}\, \Gamma(s),$$

(changement de variable $t \mapsto nt$), on voit que l'identité du lemme découle du théorème de convergence dominée. $\square$

Lemme 2.2. *Si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ à décroissance rapide à l'infini, alors la fonction :*

$$s \mapsto L(f,s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{s-1}\, \mathrm{dt},$$

définie pour $Re(s) > 0$ admet un prolongement analytique holomorphe à $\mathbb{C}$. De plus, $L(f,-n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

Démonstration. Soit ϕ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, qui vaut 1 sur $[0,1]$ et 0 sur $[2,+\infty[$. On a $f = \phi f + (1-\phi) f$ et donc :

$$L(f,s) = L(\phi f, s) + L\big((1-\phi)f, s\big).$$

Comme $(1-\phi)f$ est nulle dans un voisinage de 0 et à décroissance rapide à l'infini, le théorème de Morera et le théorème de Fubini permettent de se convaincre que la fonction :

$$s \mapsto L\big((1-\phi)f, s\big) = \int_0^{+\infty} (1-\phi(t))\, f(t)\, t^{s-1}\, \mathrm{d}t$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, puisque $\frac{1}{\Gamma(s)}$ s'annule aux entiers négatifs, on a $L\big((1-\phi)f, -n\big) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Il suffit donc de montrer le résultat pour la fonction $g := \phi f$, laquelle est à support compact.

Par intégration par parties, on obtient, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$L(g,s) = -L(g', s+1).$$

Cette formule permet alors de prolonger $L(g,s)$ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. De plus, en partant de $L(g,-n)$ et en effectuant $n+1$ telles intégrations par parties, on obtient :

$$L(g,-n) = (-1)^{n+1} L\big(g^{(n+1)}, 1\big) = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} g^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t = (-1)^n g^{(n)}(0),$$

d'où le résultat, puisque $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, évidemment. □

Soit maintenant $f_0(z) := \frac{z}{e^z - 1}$. Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, comme $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$, le Lemme 2.1 donne : $\zeta(s) = \frac{L(f_0, s-1)}{s-1}$. En appliquant le Lemme 2.2 à f_0, on obtient alors :

Théorème 2.1. *La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un unique pôle au point 1, pôle qui est simple.*

Nombres de Bernoulli et valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs. Puisque l'on a $e^z - 1 = z(1 + \mathrm{O}(z))$ au voisinage de 0, on peut définir les *nombres de Bernoulli* $(B_n)_{n\geqslant 0}$ à travers le développement en série entière (formelle) à l'origine de la fonction f_0 introduite p. 4 :

$$f_0(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n.$$

La fonction $\frac{z}{e^z-1} + \frac{1}{2}\, z$ étant impaire, on en déduit que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et que $B_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

On a $B_n = f_0^{(n)}(0)$, et comme il est clair que chaque dérivée de f_0 est une fonction rationnelle en z et en e^z, la valeur de $f_0^{(n)}$ en 0 est rationnelle. On peut aussi voir d'une autre manière que les nombres B_n sont rationnels en développant complètement la fraction en série entière :

$$f_0(z) = \frac{1}{\frac{1}{z}(e^z - 1)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots} = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \Big(\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\Big)^k,$$

et en collectant les termes en z^n.

Maintenant, une application du Lemme 2.2 à la fonction f_0 donne le :

Corollaire 2.1. *Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$.*

Voici une belle équation fonctionnelle, découverte par Riemann, à laquelle satisfait la fonction ζ :

Proposition 2.1. *Pour tout nombre complexe s qui n'est égal ni à un entier négatif pair ni à 1, on peut définir la fonction :*

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\, \zeta(s),$$

qui est holomorphe sur son domaine de définition.

Alors $\xi(s)$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\xi(s) = \xi(1-s),$$

lorsque s et $1-s$ sont dans le domaine de définition de ξ. En particulier, ξ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

Démonstration. Supposons que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Par le changement de variable $t \mapsto \pi n^2 t$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi t n^2}\, t^{\frac{s}{2}}\, \mathrm{d}t = n^{-s}\, \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big).$$

Si on se souvient maintenant que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ est absolument convergente et vaut $\zeta(s)$, alors par sommation sur n on en déduit :

$$\begin{aligned}\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\,\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi t n^2}\, t^{\frac{s}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi t n^2}\, t^{\frac{s}{2}}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

et cette dernière expression peut être réécrite sous la forme :

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \big(\theta(t) - 1\big)\, t^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

si on introduit, pour tout réel $t > 0$, la fonction $\theta(t)$ de Poisson définie par :

$$\theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi t n^2},$$

série qui est absolument convergente.

Admettons à présent l'équation fonctionnelle suivante (démontrée dans l'Annexe A) :

$$\theta(t) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta(\tfrac{1}{t}).$$

En poursuivant le calcul interrompu dans l'équation (1), et en découpant l'intégrale $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (\theta(t) - 1)\, t^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta(\tfrac{1}{t}) - 1\big)\, t^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On fait ensuite le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans la première intégrale pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 \big(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta(\tfrac{1}{t}) - 1\big)\, t^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \theta(\tfrac{1}{t})\, t^{\frac{s-3}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \theta(u)\, u^{-\frac{s+1}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} u^{-\frac{s+1}{2}}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\theta(u) - 1) u^{-\frac{s+1}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\theta(u) - 1) u^{-\frac{s+1}{2}}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Si on additionne à cette dernière expression la deuxième intégrale, on obtient pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, l'expression suivante, qui est visiblement invariante par $s \mapsto 1-s$:

$$\xi(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{(\theta(t)-1)}{t}\left(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}\right)\mathrm{d}t.$$

La fonction $\theta(t)-1$ étant une fonction à décroissance rapide à l'infini, en appliquant le théorème de Morera et le théorème de Fubini, on obtient que la fonction $s \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{(\theta(t)-1)}{t}\left(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}\right)\mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Par le théorème du prolongement analytique, la formule précédente vaut sur tout le domaine de définintion de ξ, ce qui permet de la prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. De plus, le membre de droite de cette formule est invariant par $s \mapsto 1-s$, donc ξ l'est aussi, ce qui implique que pour tout nombre complexe s différent de 0 et de 1, on a bien $\xi(s) = \xi(1-s)$. □

De ces deux propositions qui précèdent, on déduit la :

Proposition 2.2. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de $\zeta(2n)$ s'exprime en fonction de π^{2n} et du nombre de Bernouilli B_{2n} :*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\,\tfrac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\,B_{2n}.$$

Démonstration. On applique la Proposition 2.1 avec $s = 2n$:

$$\pi^{-n}\Gamma(n)\zeta(2n) = \xi(2n) = \xi(1-2n) = \pi^{n-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}-n)\zeta(1-2n). \tag{2}$$

Afin de trouver la valeur de $\zeta(2n)$, calculons les trois inconnues restantes de cette équation : $\Gamma(n)$, $\zeta(1-2n)$ et $\Gamma(\frac{1}{2}-n)$. Tout d'abord, on sait que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Ensuite, d'après le Corollaire 2.1,

$$\zeta(1-2n) = (-1)^{2n-1}\frac{B_{2n}}{2n} = -\frac{B_{2n}}{2n}.$$

Enfin, en appliquant récursivement la relation $\Gamma(s) = (s-1)\,\Gamma(s-1)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{3}{2})\,\Gamma(-\tfrac{3}{2}) = \cdots &= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-n)\\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{4^n n!}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-n).\end{aligned}$$

Le fait que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ fournit alors $\Gamma(\frac{1}{2}-n) = (-1)^n\sqrt{\pi}\,\frac{4^n n!}{(2n)!}$. En insérant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve $\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$. □

Puisque les nombres de Bernoulli B_n sont rationnels, on a $\zeta(2n) \in \pi^{2n}\mathbb{Q}$: *les valeurs de la fonction zêta aux entiers pairs s'expriment en multiples rationnels des puissances de π.* Par conséquent, la transcendance de

π (Lindemann 1882) entraîne l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des $\zeta(2n)$. Inversement, dans la Section **??**, on redémontrera la transcendance de π grâce à l'étude des $\zeta(2n)$.

3. Irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$

Apéry a donné en 1978 la première preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$, mais elle était relativement délicate et les contemporains de son annonce, notamment Van der Poorten, Beukers, Cohen et Reyssat, ont mis quelques mois chacun de leur côté et par des voies différentes en pour compléter tous les détails à leur manière. On expose ici une preuve simplifiée due à Beukers, qui démontre l'irrationalité de $\zeta(3)$ avec des techniques d'intégrales, et aussi celle de $\zeta(2)$ de manière similaire. Commençons par quelques préliminaires qui seront utilisées pour la démonstration.

• Soit $d_n = \mathrm{ppcm}\{1, 2, \ldots, n\}$ le plus petit multiple commun des n premiers entier positifs. Une estimation sur les exposants de ses facteurs premiers donne :

$$\begin{aligned} d_n = \prod_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]} &\leqslant \prod_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{\frac{\log n}{\log p}} \\ &= \prod_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} n = n^{\pi(n)} = n^{\frac{n}{\log n}+o(1)} = e^{n+o(n)}, \end{aligned}$$

où on utilise le théorème des nombres premiers : $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$. Par conséquent, on a $d_n < 3^n$ à partir d'un certain rang.

• Les *polynômes de Legendre*, définis par $P_n(X) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\big(X^n(1-X)^n\big)$, ont l'expression explicite :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}X^{n+i} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[\binom{n}{i} - \binom{n+i}{i}\right]X^i.$$

Par conséquent les $P_n(X)$ sont à coefficients entiers et $\deg(P_n) = n$.

• Pour r,s des entiers positifs, on introduit les deux intégrales impropres suivantes :

$$\begin{aligned} I_{r,s} &:= \int_0^1\int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\ J_{r,s} &:= \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy}x^r y^s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Comme les fonctions dans l'intégrale sont positives, ces deux intégrales ont une valeur bien définie dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Proposition 3.1. **(i)** *Si $r > s \geqslant 0$, alors $I_{r,s}$ et $J_{r,s}$ sont des nombres rationnels dont les dénominateurs divisent respectivement d_r^2 et d_r^3, c'est-à-dire :*

$$I_{r,s} \in \frac{1}{d_r^2}\,\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad J_{r,s} \in \frac{1}{d_r^3}\,\mathbb{Z}.$$

(ii) *Lorsque $r = s$, on a les expressions suivantes de $I_{r,r}$ et de $J_{r,r}$:*

- *pour $r = 0$: $I_{0,0} = \zeta(2)$ et $J_{0,0} = 2\zeta(3)$;*
- *pour $r \geqslant 1$:*

$$I_{r,r} = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{r^2},$$
$$J_{r,r} = 2\Big(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{1}{r^3}\Big).$$

Il découle immédiatement de cette proposition que, pour tout $r \geqslant 1$:

$$I_{r,r} \in \zeta(2)\,\mathbb{Z} + \frac{1}{d_r^2}\,\mathbb{Z} \quad \text{et :} \quad J_{r,r} \in \zeta(3)\,\mathbb{Z} + \frac{1}{d_r^3}\mathbb{Z}.$$

Démonstration. On remarque que les fonctions dans l'intégrale $I_{r,s}$ et $J_{r,s}$ sont toutes positives, ce qui permet de permuter les signes intégrale et somme. En développant donc $\frac{1}{1-xy} = \sum_{i=0}^{+\infty} (xy)^i$, le calcul de $I_{r,s}$ et $J_{r,s}$ se ramène à une série d'intégrales qui se calculent aisément. En effet, il est évident que :

$$\int_0^1 \int_0^1 x^p y^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(p+1)(q+1)},$$

et aussi grâce à $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ et par intégrations par parties on a :

$$\int_0^1 \int_0^1 -x^p y^q \log(xy) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(p+1)^2(q+1)} + \frac{1}{(p+1)(q+1)^2}.$$

On en déduit donc :

$$I_{r,s} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{r+i} y^{s+i} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)},$$

$$\begin{aligned} J_{r,s} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 -\log(xy) x^{r+i} y^{s+i} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{(r+i+1)^2(s+i+1)} + \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)^2}\Big). \end{aligned}$$

(i) Premier cas : $r > s$. En écrivant les termes dans la sommation sous forme de différence, on arrive à simplifier la sommation en une somme finie de termes :

$$\begin{aligned} I_{r,s} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{r-s}\Big(\frac{1}{s+i+1} - \frac{1}{r+i+1}\Big) \\ &= \frac{1}{r-s}\Big(\frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{r}\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{r,s} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{(r+i+1)^2(s+i+1)} + \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)^2}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{r-s}\Big(\frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)} - \frac{1}{(r+i+1)^2} + \\ &\qquad + \frac{1}{(s+i+1)^2} - \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)}\Big) \\ &= \frac{1}{r-s}\Big(\frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2}\Big). \end{aligned}$$

Comme $r > s$ et puisque $(r-s)|d_r$ et $(s+i)|d_r$ pour $i = 1, 2, \ldots, r-s$ on en déduit que $I_{r,s} \in \frac{1}{d_r^2}\mathbb{Z}$ et $J_{r,s} \in \frac{1}{d_r^3}\mathbb{Z}$.

(ii) Deuxième cas : $r = s$. Le calcul est simple :

$$I_{r,r} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+i+1)^2} = \sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \begin{cases} \zeta(2) & \text{si } r = 0 \\ \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{r^2} & \text{si } r \geqslant 1. \end{cases}$$

$$J_{r,r} = 2\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+i+1)^3} = 2\sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{1}{i^3} = \begin{cases} 2\zeta(3) & \text{si } r = 0 \\ 2\Big(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \cdots - \frac{1}{r^3}\Big) & \text{si } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Ceci achève la preuve de la proposition. □

Maintenant, on se servira du critère d'irrationalité suivant, qui sera étudié plus en détail dans l'Annexe B :

Critère d'irrationalité d'un nombre réel *Un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est irrationnel si et seulement s'il existe deux suites d'entiers $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $a_n x + b_n \neq 0$ et que $a_n x + b_n \to 0$.*

Dans la suite on utilisera aussi le principe suivant dans l'étude du comportement asymptotique de certaines fonctions :

Principe (ou méthode) du col. *Soient g et w deux fonctions holomorphes sur un ouvert simplement connexe D du plan complexe. Supposons qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $w'(z_0) = 0$ et $w''(z_0) \neq 0$. Si L est un chemin inclus dans D le long duquel $\mathrm{Re}(w(z))$ admet un maximum global en z_0, alors on a :*

$$\Big(\Big|\int_L g(z)e^{nw(z)}\mathrm{d}z\Big|\Big)^{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\mathrm{Re}(w(z_0))}.$$

Grâce à ces préliminaires, on peut maintenant établir l'irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$.

Théorème 3.1. *Le nombre $\zeta(2)$ est irrationnel.*

Démonstration. Soit M_n l'intégrale suivante :

$$M_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Comme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ et puisque $\deg(P_n) = n$, en développant le numérateur de l'intégrande de M_n en monômes de x et y, on voit que M_n est une combinaison à coefficients entiers des $I_{r,s}$ avec $n \geqslant r \geqslant s \geqslant 0$. D'après la Proposition 3.1, il existe donc des entiers A_n, B_n tels que :

$$M_n = \frac{1}{d_n^2}(A_n + B_n\zeta(2)).$$

Puisque M_n est visiblement > 0, on en déduit :

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| = d_n^2|M_n|.$$

Afin de pouvoir appliquer le critère d'irrationalité énoncé à l'instant, il serait avantageux de montrer que M_n tend suffisamment vite vers 0 pour que $d_n^2\,|M_n|$ tende aussi vers zéro, et tel est le cas, tandis que pour $\zeta(5)$, nulle démonstration analogue n'existe !

En appliquant n intégrations par parties par rapport à x, on voit aisément que :

$$M_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n(1-y)^n x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} \neq 0.$$

Dans l'intégrande le terme $\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}$ apparaît à la puissance n. D'après le principe du col, il faut rechercher le maximum de la fonction $(x,y) \mapsto \frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}$ définie sur $[0,1]^2 \backslash \{(1,1)\}$. Etudions donc cette fonction de deux variables : on montre d'abord, pour une simple raison de symétrie, que lorsque le produit xy est fixé, le maximum est atteint le long de la médiane $\{x = y\}$. Pour $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, si on pose $t = \sqrt{xy}$, d'où $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $x + y \geqslant 2t$, on peut majorer :

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} = \frac{t^2(1-y-x+t^2)}{1-t^2} \leqslant \frac{t^2(1-2t+t^2)}{1-t^2} = \frac{t^2(1-t)}{1+t}.$$

On se ramène donc à une fonction à une variable réelle. Par une étude simple de la dérivée, on sait que cette dernière fonction de t prend son maximum

$(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^5$ en $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. En majorant ainsi la fonction originale de deux variables par son maximum :

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \leqslant (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^5,$$

on déduit aisément l'estimation :

$$0 < |M_n| \leqslant \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{5n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{5n} \zeta(2).$$

Grâce à l'inégalité précédente, pour n suffisamment grand tel que $d_n < 3^n$ (rappelons que $d_n \sim e^n$), on obtient la majoration souhaitée :

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| = d_n^2 |M_n| \leqslant d_n^2 \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{5n} \zeta(2) < 9^n \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{5n} \zeta(2).$$

Ce dernier majorant tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. D'après le critère d'irrationalité, le nombre $\zeta(2)$ est donc irrationnel, comme annoncé. $\square$

Pour l'irrationalité de $\zeta(3)$, on suit le même schéma de démonstration, en s'intéressant à une autre intégrale :

Théorème 3.2. *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

Démonstration. On regarde maintenant l'intégrale suivante :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 -P_n(x)P_n(y) \frac{\log(xy)}{1-xy} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Le développement de $P_n(x)P_n(y)$ en somme des termes en $x^r y^s$ est à coefficients entiers, avec $0 \leqslant r, s \leqslant n$. Donc N_n est la somme des $J_{r,s}$ à coefficients entiers, $0 \leqslant r, s \leqslant n$. D'après la Proposition 3.1, il existe des entiers $(C_n)_{n\geqslant 0}$, $(D_n)_{n\geqslant 0}$ tels que $N_n = \frac{1}{d_n^3}(C_n + D_n\zeta(3))$. On a donc :

$$0 < |C_n + D_n\zeta(3)| = d_n^3 |N_n|.$$

Comme pour $\zeta(2)$, cherchons à démontrer que N_n tend assez rapidement vers 0 pour pouvoir utiliser le critère d'irrationalité.

On remarque que $-\frac{\log(xy)}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} \,\mathrm{d}z$, ce que l'on applique à l'expression précédente :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Maintenant on effectue n intégrations par parties par rapport à x, ce qui donne :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n z^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Par le changement de variable $z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}$, on obtient :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-w)^n P_n(y)}{1-(1-xy)w} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w.$$

On applique ensuite n intégrations par parties par rapport à y, ce qui donne :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w \neq 0.$$

Le terme $\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}$ apparaît à la puissance n dans l'intégrande. Pour pouvoir appliquer le principe du col, il faut trouver la maximum de cette fonction. Comme pour $\zeta(2)$, on remarque la symétrie par rapport à x et à y, et on essaie de se ramener au cas $x = y$. Pour $0 \leqslant x, y, w \leqslant 1$, si on pose $t = \sqrt{xy}$, alors $x + y \geqslant 2t$ et l'on peut majorer :

$$x(1-x)y(1-y) = t^2(1-x-y+t^2) \leqslant t^2(1-2t+t^2) = t^2(1-t)^2.$$

De plus, on peut réécrire :

$$\frac{w(1-w)}{1-(1-xy)w} = \frac{w(1-w)}{1-(1-t^2)w}.$$

On fixe provisoirement t et on fait varier w. Pour un t donné, cette fonction en w prend son maximum $\frac{1}{(1+t)^2}$ en $w = \frac{1}{1+t}$. En multipliant les inégalités précédentes on obtient :

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leqslant \frac{t^2(1-t)^2}{(1+t)^2}.$$

Cette dernière fonction ne dépend que d'une variable réelle. Grâce à une simple étude de sa dérivée, on vérifie qu'elle prend son maximum $(\sqrt{2}-1)^4$ en $t = \sqrt{2} - 1$. En majorant donc la fonction originale par son maximum :

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leqslant (\sqrt{2}-1)^4,$$

on obtient aisément l'estimation :

$$\begin{aligned} 0 < |M_n| &\leqslant (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w \\ &= (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}. \end{aligned}$$

Grâce à cette dernière inégalité, pour n suffisamment grand tel que $d_n < 3^n$, on a la majoration souhaitée :

$$0 < |C_n + D_n\zeta(3)| = d_n^3|N_n| \leqslant 2\zeta(3)d_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n} < 2\zeta(3)27^n(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. D'après le critère d'irrationalité, le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel. $\square$

Malheureusement, on n'arrive pas à généraliser directement cette méthode pour démontrer l'irrationalité de $\zeta(5)$, qui reste toujours un mystère, tout comme l'irrationalité des autres $\zeta(2n+1)$. Pourtant, une généralisation est envisageable, car dans l'étude des polylogarithmes, il y a des intégrales qui ressemblent à celles utilisées dans cette section pour la preuve de l'irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$.

Annexe A. Étude la fonction θ

On rappelle que la fonction θ est définie pour un réel $t > 0$ par

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2},$$

série qui est absolument convergente. On se propose de montrer l'équation fonctionnelle suivante :

Proposition A.1. *Pour tout réel $t > 0$, la fonction θ vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\theta(t) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\big(\tfrac{1}{t}\big).$$

Démonstration. Un résultat classique de calcul d'intégrale gaussienne donne, pour $t > 0$ et pour $y \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2i\pi xy}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\pi y^2}{t}}.$$

(Pour la démonstration, on étudie la fonction $z \mapsto f(z) = e^{-\pi t z^2}$ dans le plan complexe, et lorsqu'il s'agit de calculer l'intégrale à gauche on se ramène à intégrer f suivant une droite horizontale orientée de gauche à droite ; le théorème de Cauchy permet alors de montrer que cette intégrale est égale à l'intégrale de f suivant l'axe réel orienté vers la droite, puis on conclut sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}$.)

Posons $\phi(x) := e^{-\pi t x^2}$. La transformée de Fourier de cette fonction vaut :

$$\widehat{\phi}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)e^{-2i\pi yx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\pi y^2}{t}}.$$

Or ϕ est une fonction à décroissance rapide à l'infini, donc la formule sommatoire de Poisson s'applique :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(n),$$

et cela nous donne :

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\pi n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\Big(\frac{1}{t}\Big),$$

ce qui achève la preuve. □

Annexe B. Critères d'irrationalité

Commençons par un énoncé élémentaire.

Proposition B.1. *Un nombre réel β est rationnel si et seulement si il existe un nombre entier $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $\beta \neq \frac{p}{q}$, l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$\Big|\beta - \frac{p}{q}\Big| \geqslant \frac{1}{qq_0}.$$

Démonstration. Montrons d'abord le sens direct. Si β est rationnel, soit $\beta = \frac{p_0}{q_0}$. Alors $|\beta - \frac{p}{q}| = \frac{|pq_0 - qp_0|}{|qq_0|}$. Si le numérateur est non nul, sa valeur absolue est $\geqslant 1$. D'où $|\beta - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{qq_0}$.

Réciproquement, soit β un nombre irrationnel. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouvons un couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\Big|\beta - \frac{p}{q}\Big| < \frac{1}{qn}.$$

Pour x un nombre réel, notons $\{x\}$ la partie fractionnaire de x et $[x]$ la partie entière de x, alors $x = \{x\} + [x]$. Considérons la suite $\{\beta\}, \{2\beta\}, \{3\beta\}, \ldots$, qui est à valeurs dans $[0,1[$. Cette suite est injective car β est irrationnel. Donc il existe deux entiers distincts $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ tels que $\big|\{a\beta\} - \{b\beta\}\big| < \frac{1}{n}$. Et alors :

$$\big|a\beta - b\beta - [a\beta] + [b\beta]\big| = \big|\{a\beta\} - \{b\beta\}\big| < \frac{1}{n}.$$

En posant $q = a - b$ et $p = [a\beta] - [b\beta]$ on obtient $|q\beta - p| < \frac{1}{n}$, donc le couple (p,q) convient.

Par contraposée, s'il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $\beta \neq \frac{p}{q}$, on a $\big|\beta - \frac{p}{q}\big| \geqslant \frac{1}{qq_0}$, alors β est rationnel. □

On en déduit le critère d'irrationalité déjà évoqué p. 11 :

Corollaire B.1. **(Critère d'irrationalité d'un nombre réel)** *Un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est irrationnel si et seulement si il existe deux suites d'entiers $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $a_n x + b_n \neq 0$ et que $a_n x + b_n \to 0$.* □

RÉFÉRENCES

[1] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astéristique **61** (1979), 11–13

[2] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), no. 1, 193–207. MR1859021 (2003a :11086)

[3] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London. Math. Soc. **11** (1978), no. 33, 268–272.

[4] F. Beukers, *The values of Polylogarithms*, "Topics in classical number theory", Vol. I, II (Budapest, 1981), 219–228, Colloq. Math. Soc. Jànos Bolyai, 34, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[5] J.-B. Bost, Ph. Biane, P. Colmez, *La fonction zêta*, Éditions XUPS, Paris, 2002, 206 pp.

[6] P. Colmez, *Arithmétique de la fonction zêta*, in *La fonction zêta*, Edition Éc. Polytech., 2003, 37–164. www.math.polytechnique.fr/xups/xups02-02.pdf

[7] L.A. Gutnik, *The irrationality of certain quantities involving $\zeta(3)$*, Russ. Math. Surv. **34** (1979), no. 3, 200. En russe dans Acta Arith. **42** (1983), no. 3, 255–264.

[8] Yu. V. Nesterenko, *On the linear independence of numbers*, Versnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., **108** (1985), 46–49,.

[9] T. Rivoal, *Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann*, survol pour la revue Quadrature (2003), www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼rivoal/articles/quaddefi.pdf

[10] A. Van der Poorten, *A proof that Euler missed … Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$*, Math. Intellig. **1** (1979), 195–203

[11] M. Waldschmidt, *Valeurs zêtas multiples. Une introduction*, J. Théor. Nombres de Bordeaux **12** (2000), 581–595

[12] D. Zagier *Neuman's short proof of the Prime Number Theorem*, Amer. Math. Monthly, **104** (1997), no. 8, 705–708

[13] W. Zudilin *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théor. Nombres de Bordeaux **16** (2004), no. 1, 251–291.