DEUXIÈME PARTIE.

MÉMOIRES PUBLIÉS APRÈS LA MORT DE RIEMANN.

SUR

LA POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER UNE FONCTION

PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE.

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Göttingue, t. XIII (1).
Œuvres de Riemann, 2e édit., p. 230.

(Traduction publiée dans le *Bulletin des Sciences mathém. et astron.*, tome V; juillet 1873.)

Le présent travail sur les séries trigonométriques se compose de deux Parties essentiellement distinctes. La première contient une histoire des recherches et des opinions des géomètres sur les fonctions arbitraires données graphiquement, et sur la possibilité

(1) Ce Mémoire a été présenté par l'auteur, en 1854, à la Faculté de Philosophie pour son habilitation à l'Université de Göttingue. Bien que l'auteur ne semble pas l'avoir destiné à la publicité, cependant l'impression de ce travail sans aucun changement de forme paraîtra suffisamment justifiée tant par l'intérêt considérable qui s'attache au sujet, que par la manière dont y sont traités les principes les plus importants de l'Analyse infinitésimale.

Brunswick, juillet 1867. R. DEDEKIND.

de les représenter par des séries trigonométriques. Le rapprochement de ces résultats m'a permis de mettre à profit quelques indications de l'illustre géomètre ([1]) à qui l'on doit le premier travail sur cet objet. Dans la seconde, je soumets la représentation d'une fonction par une série trigonométrique à un examen qui embrasse des cas qui n'ont pas encore été traités jusqu'ici. Il a été nécessaire de faire précéder cette étude d'une courte Note sur la notion d'intégrale définie, et sur l'étendue dans laquelle cette notion est applicable.

Histoire des recherches relatives à la représentation par une série trigonométrique d'une fonction donnée arbitrairement.

§ I.

Les séries trigonométriques, ainsi appelées par Fourier, c'est-à-dire les séries de la forme

$$\begin{gathered} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots \\ + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots, \end{gathered}$$

jouent un rôle considérable dans la partie des Mathématiques où l'on rencontre des fonctions entièrement arbitraires; on est même fondé à dire que les progrès les plus essentiels de cette partie des Mathématiques, si importante pour la Physique, ont été subordonnés à la connaissance plus exacte de la nature de ces séries. Dès les premières recherches mathématiques qui ont conduit à la considération des fonctions arbitraires, s'est posée la question de savoir si une fonction entièrement arbitraire pouvait se représenter par une série de la forme ci-dessus.

Cette question a pris naissance vers le milieu du siècle précédent, à l'occasion des recherches sur les cordes vibrantes, dont s'occupaient alors les plus célèbres géomètres. Il serait difficile d'exposer leurs vues sur ce sujet sans entrer dans les détails du problème.

([1]) Lejeune-Dirichlet.

Sous certaines hypothèses, qui s'accordent de très près avec la réalité, la forme d'une corde tendue, vibrant dans son plan (en désignant par x la distance d'un quelconque de ses points à son extrémité initiale, et par y la distance, au bout du temps t, de ce point à sa position d'équilibre), est, comme on sait, déterminée par l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

α étant indépendant de t et, dans le cas d'une corde d'épaisseur uniforme, indépendant de x.

D'Alembert est le premier qui ait donné une solution générale de cette équation différentielle.

Il a montré (1) que toute fonction de x et de t qui, mise à la place de y, rend cette équation identique, doit être contenue dans la formule

$$f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t),$$

ainsi qu'on le voit en introduisant comme variables indépendantes $x + \alpha t$, $x - \alpha t$ à la place de x, t, ce qui change

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{en} \quad 4\,\frac{\partial \dfrac{\partial y}{\partial(x+\alpha t)}}{\partial(x - \alpha t)}.$$

Outre cette équation aux différentielles partielles, qui résulte des lois générales du mouvement, il faut encore que y satisfasse à la condition d'être constamment $= 0$ aux points d'attache de la corde; on a donc, en faisant pour l'un de ces points $x = 0$, pour l'autre $x = l$,

$$f(\alpha t) = -\varphi(-\alpha t), \qquad f(l + \alpha t) = -\varphi(l - \alpha t),$$

et, par suite,

$$f(z) = -\varphi(-z) = -\varphi[l - (l + z)] = f(2l + z),$$
$$y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x).$$

Après avoir poussé jusque-là la solution générale du problème, d'Alembert s'occupe, dans une suite à son Mémoire (2), de l'équa-

(1) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, p. 214; 1747.

(2) *Ibid.*, p. 220.

tion $f(z)=f(2l+z)$, c'est-à-dire qu'il cherche des expressions analytiques qui restent invariables lorsque z croît de $2l$.

C'est le mérite essentiel d'Euler, qui a donné, dans le Volume suivant des Mémoires de Berlin (1), une nouvelle exposition de ces travaux de d'Alembert, d'avoir reconnu plus exactement la nature des conditions auxquelles la fonction $f(z)$ doit satisfaire. Il remarqua que, d'après la nature du problème, le mouvement de la corde est complètement déterminé si l'on donne, pour un instant quelconque, la forme de la corde et la vitesse de chaque point $\left(\text{c'est-à-dire } y \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t}\right)$, et il fit voir que, si l'on imagine que ces deux fonctions soient définies par des courbes tracées arbitrairement, on peut toujours en déduire, par une simple construction géométrique, la fonction $f(z)$ de d'Alembert. Supposons, en effet, que l'on ait, pour $t=0$,

$$y = g(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = h(x);$$

il vient, pour les valeurs de x entre 0 et l,

$$f(x)-f(-x) = g(x), \qquad f(x)+f(-x) = \frac{1}{\alpha}\int h(x)\,dx,$$

et, par suite, on obtient la fonction $f(z)$ entre $-l$ et l. Or de là on déduit la valeur de cette fonction pour toute autre valeur de z, au moyen de l'équation $f(z)=f(2l+z)$. Telle est, en notions abstraites, mais actuellement bien connues, la détermination due à Euler de la fonction $f(z)$.

Cependant d'Alembert protesta contre cette extension donnée à sa méthode par Euler (2), parce que sa méthode supposait nécessairement que y pût s'exprimer analytiquement en t et en x.

Avant qu'Euler eût fait connaître sa réponse, parut un troisième travail sur ce sujet, tout différent des deux premiers et dû à Daniel Bernoulli (3). Déjà, avant d'Alembert, Taylor avait vu

(1) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, p. 69; 1748.

(2) *Ibid.*, p. 358; 1750. « En effet, on ne peut, ce me semble, exprimer y analytiquement d'une manière plus générale qu'en le supposant une fonction de t et de x. Mais, dans cette supposition, on ne trouve la solution du problème que pour les cas où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une seule et même équation. »

(3) *Ibid.*, p. 147; 1753.

que l'on a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial y^2},$$

et que, en même temps, y est toujours égal à o pour $x = 0$ et pour $x = l$, si l'on pose

$$y = \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi\alpha t}{l},$$

en prenant pour n un nombre entier. Il expliquait ainsi le fait physique qu'une corde, outre le son fondamental qui lui est propre, peut encore donner le son fondamental d'une corde ayant une longueur égale à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... de la sienne (et d'une constitution d'ailleurs identique), et il regardait sa solution particulière comme une solution générale, croyant que la vibration de la corde, si le nombre entier n était déterminé d'après la hauteur du son, serait représentée, au moins très approximativement, par cette équation. L'observation qu'une corde pouvait donner simultanément ses différents sons conduisit maintenant Bernoulli à cette remarque, que la corde (suivant la théorie) pouvait aussi vibrer conformément à l'équation

$$y = \sum a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi\alpha}{l}(t - \beta_n),$$

et, comme cette équation donnait l'explication de toutes les modifications observées du phénomène, il la considérait comme la plus générale (1). A l'appui de cette opinion, il étudia les vibrations d'un fil tendu, sans masse, chargé en certains points de masses finies, et fit voir que ces vibrations pouvaient toujours se décomposer en un nombre, égal au nombre des points, de vibrations dont chacune est de même durée pour toutes les masses.

Ces travaux de Bernoulli furent l'occasion d'un nouveau Mémoire d'Euler, imprimé immédiatement à leur suite, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* (2). Euler y soutient (3), à l'encontre de d'Alembert, que la fonction peut être complètement arbitraire avec les limites $-l$ et $+l$, et remarque (4) que la so-

(1) *Loc. cit.*, p. 157, art. XIII.
(2) Année 1753, p. 196.
(3) *Loc. cit.*, p. 214.
(4) *Loc. cit.*, art. III-X.

lution de Bernoulli (qu'il avait déjà prouvé n'être qu'une solution particulière) serait générale dans le cas, et seulement dans le cas, où la série

$$a_1 \sin\frac{x\pi}{l} + a_2 \sin\frac{2x\pi}{l} + \ldots + \frac{1}{2} b_0 + b_2 \cos\frac{x\pi}{l} + b_2 \cos\frac{2x\pi}{l} + \ldots$$

pourrait représenter, pour l'abscisse x, l'ordonnée d'une courbe entièrement arbitraire entre o et l. Or personne, à cette époque, n'avait mis en doute que toutes les transformations que l'on pouvait faire subir à une expression analytique, qu'elle fût finie ou infinie, ne fussent légitimes pour toutes les valeurs des quantités indéterminées, ou du moins que, si elles devenaient inapplicables, ce ne fût seulement que dans des cas tout à fait spéciaux. Il semblait donc impossible de représenter une courbe algébrique, ou généralement une courbe analytique donnée *non périodique* par l'expression périodique ci-dessus, et Euler croyait, en conséquence, devoir décider la question contre Bernoulli.

Cependant le débat entre Euler et d'Alembert n'était pas encore terminé. Cela engagea un jeune géomètre, encore peu connu alors, Lagrange, à tenter la résolution du problème par une voie toute nouvelle, par laquelle il arriva aux résultats d'Euler. Il entreprit (¹) de déterminer les vibrations d'un fil sans masse, chargé d'un nombre indéterminé et fini de masses égales et équidistantes, et il rechercha ensuite comment varient ces vibrations lorsque le nombre des masses croît à l'infini. Mais, quelque habileté, quelque richesse d'artifices analytiques qu'il eût déployée dans la première partie de cette étude, le passage du fini à l'infini laissait encore beaucoup à désirer; si bien que d'Alembert, dans un écrit qu'il plaça en tête de ses *Opuscules mathématiques*, put continuer à réclamer pour sa propre solution le mérite de la plus grande généralité. Les opinions des plus grands géomètres de cette époque continuèrent donc à rester divisées sur ce sujet; car, dans leurs travaux ultérieurs, chacun conserva, au fond, son point de vue.

Pour résumer finalement les manières de voir qu'ils ont développées à l'occasion de ce problème touchant les fonctions arbi-

(¹) *Miscellanea Taurinensia*, t. I. Recherches sur la nature et la propagation du son.

traires et la possibilité de les représenter par une série trigonométrique, Euler avait, le premier introduit ces fonctions dans l'Analyse, et, s'appuyant sur l'intuition géométrique, leur avait appliqué le Calcul infinitésimal. Lagrange (¹) tint pour exacts les résultats d'Euler (sa construction géométrique de la courbe des vibrations); mais il ne trouva pas satisfaisant les procédés géométriques d'Euler pour traiter ces fonctions. D'Alembert (²), au contraire, admettait la manière dont Euler envisageait le Calcul différentiel, et se bornait à contester la justesse de ses résultats, parce que, dans le cas des fonctions entièrement arbitraires, on ne pouvait pas savoir si leurs quotients différentiels étaient continus. Pour ce qui est de la solution de Bernoulli, ils s'accordaient tous les trois à ne pas la considérer comme générale; mais, tandis que d'Alembert (³), pour pouvoir déclarer la solution de Bernoulli moins générale que la sienne, était forcé de soutenir qu'une fonction analytique donnée, même périodique, ne peut pas toujours être représentée par une série trigonométrique, Lagrange (⁴) croyait pouvoir démontrer cette possibilité.

§ II.

Près de cinquante années s'étaient écoulées sans que la question de la possibilité de la représentation analytique des fonctions arbitraires fît aucun progrès essentiel, quand une remarque de Fourier vint jeter un nouveau jour sur cet objet. Une nouvelle ère s'ouvrit pour le développement de cette partie des Mathématiques, et s'annonça bientôt d'une manière éclatante par de grandioses développements de la Physique mathématique. Fourier remarqua que, dans la série trigonométrique

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots,$$

(¹) *Miscellanea Taurinensia*, t. II, Pars math., p. 18.

(²) *Opuscules mathématiques*, t. I, 1761, p. 16, art. VII-XX.

(³) *Opuscules mathématiques*, t. I. p. 42, art. XXIV.

(⁴) *Miscellanea Taurinensia*, t. III, Pars math., p. 221, art. XXV.

les coefficients se déterminent par les formules

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Il vit que cette détermination reste encore applicable lorsque la fonction $f(x)$ est donnée tout à fait arbitrairement; il substitua d'abord pour $f(x)$ une fonction de celles qu'on nomme *discontinues* (l'ordonnée d'une ligne présentant un point de rupture pour certaines valeurs de l'abscisse x), et il obtint ainsi une série qui, effectivement, donnait toujours la valeur de la fonction.

Quand Fourier, dans un de ses premiers travaux sur la chaleur, présenté à l'Académie des Sciences le 21 décembre 1807 (1), énonça pour la première fois cette proposition, qu'une fonction donnée (graphiquement) d'une manière tout à fait arbitraire pouvait s'exprimer par une série trigonométrique, cette assertion parut à Lagrange si inattendue, que l'illustre vieillard la contesta de la manière la plus formelle. Il doit exister encore (2) sur ce débat une pièce écrite dans les Archives de l'Académie de Paris. Malgré cela, Poisson, partout où il se sert des séries trigonométriques pour représenter des fonctions arbitraires, renvoie (3) à un passage des travaux de Lagrange sur les cordes vibrantes, où cette représentation doit se trouver. Pour réfuter cette allégation, qu'on ne peut expliquer qu'en se rappelant la rivalité qui existait entre Fourier et Poisson (4), nous sommes forcés de revenir encore une fois au Mémoire de Lagrange; car les Recueils publiés par l'Académie ne contiennent rien sur cet objet.

On trouve effectivement, à l'endroit cité par Poisson (5), la formule

$$\begin{aligned} y &= 2\int Y\sin X\pi\,dX \times \sin x\pi + 2\int Y\sin 2X\pi\,dX \times \sin 2x\pi \\ &\quad + 2\int_1 Y\sin 3X\pi\,dX \times \sin 3x\pi + \ldots + 2\int Y\sin nX\pi\,dX \times \sin nx\pi, \end{aligned}$$

(1) *Bulletin des Sciences pour la Société philomathique*, t. I, p. 112.

(2) D'après une Communication verbale du professeur Dirichlet.

(3) Notamment dans son Ouvrage le plus répandu, son *Traité de Mécanique*, n° 323, t. I, p. 638.

(4) Le Compte rendu dans le *Bulletin des Sciences* sur le Mémoire présenté par Fourier à l'Académie est de Poisson.

(5) *Miscellanea Taurinensia*, t. III, Pars math., p. 261.

« de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X. »

Cette formule a bien le même aspect que la série de Fourier, et peut, au premier coup d'œil, être confondue avec elle; mais cette apparence provient simplement de ce que Lagrange a employé le signe $\int dX$ là où nous emploierions aujourd'hui le signe $\Sigma\Delta X$. Elle donne la solution de ce problème : Déterminer la série finie de sinus

$$a_1 \sin x\pi + a_2 \sin 2x\pi + \ldots + a_n \sin nx\pi,$$

de façon que, pour les valeurs $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$ de x, que Lagrange désigne d'une façon indéterminée par X, elle prenne des valeurs données. Si Lagrange avait fait n infini dans cette formule, il serait bien parvenu au résultat de Fourier; mais, lorsqu'on lit complètement son Mémoire, on voit qu'il est fort éloigné de croire qu'une fonction tout à fait arbitraire puisse réellement être représentée par une série infinie de sinus. Il avait, au contraire, entrepris tout son travail, parce qu'il croyait que ces fonctions arbitraires ne sont pas exprimables par une formule, et, quant à la série trigonométrique, il pensait qu'elle peut représenter toute fonction périodique donnée analytiquement. Aujourd'hui, il est vrai, nous avons peine à concevoir que Lagrange ne dût pas arriver de sa formule de sommation à la série de Fourier; mais cela s'explique par cette circonstance, que le débat entre Euler et d'Alembert avait fait naître dans son esprit une opinion arrêtée sur la voie qu'il fallait suivre. Il croyait que l'on devait commencer par résoudre complètement le problème des vibrations pour un nombre fini indéterminé de masses, avant d'employer les considérations de limites. Ces considérations exigent une étude assez étendue (1), qui eût été inutile s'il avait connu la série de Fourier.

C'est Fourier qui a, le premier, compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques (2). Celles-ci ont été, depuis, employées de diverses manières en Physique ma-

(1) *Miscellanea Taurinensia,* t. III, Pars math., p. 251.

(2) *Bulletin des Sciences,* t. I, p. 115. « Les coefficients a, a', a'', ... étant ainsi déterminés, etc. »

thématique pour la représentation des fonctions arbitraires, et, dans chaque cas particulier, on s'est aisément convaincu que la série de Fourier convergeait effectivement vers la valeur de la fonction; mais on est resté longtemps avant de pouvoir démontrer généralement cet important théorème.

La démonstration donnée par Cauchy dans un Mémoire lu, le 27 février 1826, à l'Académie de Paris (¹), est insuffisante, comme Dirichlet l'a fait voir (²). Cauchy suppose que, si, dans une fonction périodique $f(x)$, donnée arbitrairement, on remplace x par un argument complexe $x+yi$, cette fonction est finie pour toute valeur de y; mais cela n'a lieu que pour le *seul* cas où la fonction est égale à une grandeur constante. Il est cependant facile de voir que cette supposition n'est pas nécessaire pour la suite des conclusions. Il suffit que l'on ait une fonction $\varphi(x+yi)$, qui soit finie pour toutes les valeurs positives de y, et dont la partie réelle devienne égale, pour $y=0$, à la fonction périodique donnée $f(x)$. Si l'on admet préalablement cette proposition, qui est, en effet, vraie (³), la voie proposée par Cauchy conduit alors au but, comme, réciproquement, cette proposition peut se déduire du théorème de Fourier.

§ III.

En janvier 1829 parut, dans le *Journal de Crelle* (⁴) un Mémoire de Dirichlet, où la possibilité de la représentation par les séries trigonométriques se trouvait établie en toute rigueur pour les fonctions qui sont, en général, susceptibles d'intégration, et qui ne présentent pas une infinité de maxima et de minima.

Il arriva à la découverte du chemin à suivre pour obtenir la solution de ce problème, par la considération que les séries infinies se partagent en deux classes, suivant qu'elles restent ou non convergentes, lorsqu'on rend tous leurs termes positifs. Dans les premières, les termes peuvent être intervertis d'une manière quel-

(¹) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 603.

(²) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 157 et 158.

(³) La démonstration se trouve dans la Dissertation inaugurale de l'auteur.

(⁴) T. 4, p. 157.

conque; dans les autres, au contraire, la valeur dépend de l'ordre des termes. Si l'on désigne, en effet, dans une série de la seconde classe, les termes positifs successifs par

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots,$$

et les termes négatifs par

$$-b_1, \quad -b_2, \quad -b_3, \quad \ldots,$$

il est clair que Σa, ainsi que Σb, doit être infinie; car, si ces deux sommes étaient finies l'une et l'autre, la série serait encore convergente lorsqu'on donnerait à tous les termes le même signe; si une seule était infinie, la série serait divergente. Il est clair maintenant que la série, en plaçant les termes dans un ordre convenable, pourra prendre une valeur donnée quelconque C; car, si l'on prend alternativement des termes positifs de la série jusqu'à ce que sa valeur soit plus grande que C, puis des termes négatifs jusqu'à ce que sa valeur soit moindre que C, la différence entre cette valeur et C ne surpassera jamais la valeur du terme qui précède le dernier changement de signe. Or les quantités a, aussi bien que les quantités b, finissant toujours par devenir infiniment petites pour des valeurs croissantes de l'indice, les écarts entre la somme de la série et C deviendront encore infiniment petits, lorsqu'on prolongera assez loin la série, c'est-à-dire que la série converge vers C.

C'est aux seules séries de la première classe que l'on peut appliquer les lois des sommes finies; elles seules peuvent être considérées comme l'ensemble de leurs termes; celles de la seconde classe ne le peuvent pas : circonstance qui avait échappé aux mathématiciens du siècle dernier, principalement par la raison que les séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes d'une variable appartiennent, généralement parlant (c'est-à-dire à l'exception de certaines valeurs particulières de cette variable), à la première classe.

La série de Fourier, évidemment, n'appartient pas nécessairement à la première classe; on ne pouvait donc point, comme Cauchy avait vainement tenté de le faire (¹), déduire sa conver-

(¹) DIRICHLET, *Journal de Crelle*, t. 4, p. 158 : « Quoi qu'il en soit de cette première observation, ... à mesure que n croît. »

gence de la loi suivant laquelle les termes décroissent. Il fallait montrer, au contraire, que la série finie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha \sin x \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha\, d\alpha \sin 2x + \ldots + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha \sin nx \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha \cos x \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos 2\alpha\, d\alpha \cos 2x + \ldots + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha \cos nx,
\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\, d\alpha$$

s'approche indéfiniment de la valeur $f(x)$, pour n croissant à l'infini.

Dirichlet fonde cette démonstration sur les deux propositions suivantes :

1° Si $0 < c \overline{\leq} \frac{\pi}{2}$, l'intégrale

$$\int_b^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta,$$

pour n croissant indéfiniment, tend vers la valeur $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$;

2° Si $0 < b < c \overline{\leq} \frac{\pi}{2}$, l'intégrale

$$\int_0^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta,$$

pour n croissant indéfiniment, tend vers la valeur zéro;

la fonction $\varphi(\beta)$ étant supposée toujours décroissante ou toujours croissante entre les limites de ces intégrales.

A l'aide de ces deux propositions, on peut évidemment, si la fonction ne passe pas un nombre infini de fois d'une marche croissante à une marche décroissante et *vice versa,* décomposer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

en un nombre *fini* de termes, dont l'un converge vers $\frac{1}{2}f(x+0)$(¹), un autre vers $f(x-0)$, et tous les autres vers o, lorsque n croît à l'infini.

De là résulte que l'on peut représenter par une série trigonométrique toute fonction se reproduisant périodiquement après l'intervalle 2π, et

1° Qui est généralement susceptible d'intégration;

2° Qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima;

3° Qui, dans le cas où sa valeur varie brusquement, prend la valeur moyenne entre les valeurs limites prises de part et d'autre de la discontinuité.

Une fonction qui jouit des deux premières propriétés, et non de la troisième, ne peut évidemment pas être représentée par une série trigonométrique : car la série trigonométrique qui la représenterait en dehors des discontinuités en différerait aux points mêmes de discontinuité; mais une fonction ne remplissant pas les deux premières conditions peut-elle, et dans quel cas peut-elle être représentée par une série trigonométrique? C'est le point que les recherches de Dirichlet laissent indécis.

Ce travail de Dirichlet a donné une base solide à un grand nombre de recherches analytiques importantes. En mettant en pleine lumière un point sur lequel Euler s'était trompé, il a réussi à éclaircir une question qui avait occupé, depuis plus de soixante-dix ans (depuis l'année 1753), tant d'éminents géomètres. En effet, pour tous les cas de la nature, les seuls dont il s'agit ici, la

(¹) On démontre sans difficulté que la valeur d'une fonction f, qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, l'argument tendant vers x, soit par des valeurs décroissantes, soit par des valeurs croissantes, doit toujours ou converger vers les valeurs finies $f(x+0)$ et $f(x-0)$ (d'après la notation de Dirichlet, *Dove's Repertorium der Physik,* t. I, p. 170), ou devenir infiniment grande [1].

question était complètement résolue; car, si peu que nous sachions comment les forces et les états de la matière varient avec le lieu et avec le temps dans les infiniment petits, nous pouvons cependant admettre en toute sécurité que les fonctions auxquelles ne s'appliqueraient pas les recherches de Dirichlet ne se rencontrent pas dans la nature.

Toutefois, ces cas non élucidés par Dirichlet semblent, pour une double raison, mériter l'attention.

En premier lieu, comme Dirichlet lui-même le remarque à la fin de son Mémoire, cet objet est intimement lié avec les principes du Calcul infinitésimal, et peut servir à porter dans ces principes une plus grande clarté et une plus grande précision. Sous ce rapport, l'étude de cette question offre un intérêt immédiat.

Mais, en second lieu, l'application des séries de Fourier n'est pas restreinte aux seules recherches physiques; on l'emploie aussi maintenant avec succès dans une branche des Mathématiques pures, la Théorie des nombres, et ici ce sont précisément les fonctions dont Dirichlet n'a pas étudié la représentation en série trigonométrique qui semblent être les plus importantes.

A la fin de son Mémoire, Dirichlet promet bien de revenir plus tard sur ces cas; mais sa promesse est restée jusqu'ici sans effet. Les travaux de Dirksen et de Bessel sur les séries de sinus et de cosinus ne fournissent pas ce complément; ils sont, au contraire, inférieurs à celui de Dirichlet sous le rapport de la rigueur et de la généralité. Le Mémoire de Dirksen, publié presque en même temps que celui de Dirichlet [1], dont évidemment Dirksen n'avait pu prendre connaissance, suit en général une bonne marche; mais il contient quelques inexactitudes de détail. Sans parler, en effet, de ce que, dans un cas spécial [2], il trouve pour la somme de la série un résultat faux, il s'appuie, dans une étude accessoire, sur un développement en série [3], qui n'est possible que dans des cas particuliers, de sorte que sa démonstration n'est complète que pour les fonctions dont la première dérivée est toujours finie. Bessel [4]

(1) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 176.
(2) *Loc. cit.*, formule (22).
(3) *Loc. cit.*, art. 3.
(4) SCHUMACHER, *Astronomische Nachrichten*, n° 374 (t. XVI, p. 229).

cherche à simplifier la démonstration de Dirichlet; mais les modifications apportées dans cette démonstration ne donnent aucune simplification essentielle dans les conclusions, et servent tout au plus à les revêtir d'une forme plus habituelle, ce dont la rigueur et la généralité ont notablement à souffrir.

La question de la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique n'est donc résolue, jusqu'ici, que dans ces deux hypothèses, que la fonction soit généralement susceptible d'intégration et n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima. Si cette dernière hypothèse n'est pas admise, les deux théorèmes d'intégration de Dirichlet ne suffisent plus pour décider la question; mais si la première hypothèse est rejetée, la règle de Fourier pour la détermination des coefficients n'est déjà plus applicable. La voie que nous allons suivre pour étudier cette question, sans faire de suppositions particulières sur la nature de la fonction, dépend de là, comme on le verra; une voie aussi directe que celle de Dirichlet n'est pas possible par la nature même du problème.

Sur la notion de l'intégrale définie, et sur l'étendue dans laquelle elle est applicable.

§ IV.

L'incertitude qui règne encore sur quelques points fondamentaux de la théorie des intégrales définies nous oblige à placer ici quelques remarques sur la notion de l'intégrale définie, et sur la généralité dont elle est susceptible.

Et d'abord que doit-on entendre par

$$\int_a^b f(x)\,dx?$$

Pour répondre à cette question, prenons entre a et b une série de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, rangées par ordre de grandeur, depuis a jusqu'à b, et désignons pour abréger $x_1 - a$ par δ_1, $x_2 - x_1$ par $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ par δ_n; soient, en outre, ε_i des nombres positifs plus petits que l'unité. Il est clair que la valeur de la somme

$$\begin{aligned} S = {} & \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) \\ & + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n) \end{aligned}$$

dépendra du choix des intervalles δ et des fractions ε. Si elle a la propriété, de quelque manière que les δ et les ε puissent être choisis, de s'approcher indéfiniment d'une limite fixe A, quand les δ tendent tous vers zéro, cette limite s'appelle *la valeur de l'intégrale définie* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Si la somme S ne tend vers aucune limite, la notation

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ne peut avoir aucune signification. On a cependant cherché dans plusieurs cas à conserver à ce signe une définition précise, et parmi les généralisations de la notion d'intégrale définie il en est une qui a reçu l'assentiment de tous les géomètres. Si la fonction $f(x)$ devient infinie quand son argument x s'approche d'une valeur particulière c, comprise dans l'intervalle (a, b), alors évidemment la somme S, quel que soit le degré de petitesse attribué aux δ, peut prendre une valeur quelconque : elle n'a donc aucune limite et le signe $\int_a^b f(x)\,dx$ n'aurait, d'après ce qui précède, aucune signification; mais, si l'expression

$$\int_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x)\,dx$$

s'approche, lorsque α_1 et α_2 deviennent infiniment petits, d'une limite fixe, c'est cette limite que l'on désigne par

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

D'autres extensions, dues à Cauchy, de la définition de l'intégrale définie dans le cas où cette définition ne découle pas des notions fondamentales qui précèdent, peuvent être commodes pour certaines classes de recherches, mais elles ne sont pas généralement admises, et l'arbitraire qui préside aux définitions de Cauchy suffirait seul à les empêcher d'être universellement acceptées.

§ V.

Recherchons maintenant l'étendue et la limite de la définition précédente, et posons-nous cette question : dans quels cas une fonction est-elle susceptible d'intégration? dans quels cas ne l'est-elle pas?

Considérons d'abord la définition de l'intégrale dans son sens le plus étroit, c'est-à-dire supposons que la fonction ne devienne pas infinie, et que la somme S converge, quand tous les δ tendent vers zéro. Désignons la plus grande oscillation de la fonction entre a et x_1, c'est-à-dire la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur dans cet intervalle par D_1 ; de même, les plus grandes oscillations entre x_1 et x_2 par D_2, ..., entre x_{n-1} et b par D_n; alors la somme

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

doit devenir infiniment petite avec les quantités δ. Supposons que la plus grande valeur que cette somme puisse prendre, quand tous les δ sont plus petits que d, soit Δ; Δ sera alors une fonction de d, diminuant et devenant infiniment petite avec d. Maintenant, si la somme totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont plus grandes qu'une quantité σ est s, le contribution de ces intervalles à la somme

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

sera évidemment égale ou supérieure à σs. On aura donc

$$\sigma s \gtreqless \delta_1 D_1 + \ldots + \delta_n D_n \gtreqless \Delta; \qquad \text{d'où} \qquad s \gtreqless \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\frac{\Delta}{\sigma}$ peut d'ailleurs, si σ est fixe et donné, être rendu infiniment petit par un choix convenable de d; il en sera donc de même de s, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que la somme S *converge, quand tous les* δ *deviennent* *infiniment petits, il faut non seulement que la fonction demeure finie, mais encore que la somme totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont plus grandes que σ, quelque soit σ, puisse être rendue infiniment petite par un choix convenable de d.*

Cette proposition admet une réciproque :

Si la fonction $f(x)$ est toujours finie, et si, par le décroissement indéfini de toutes les quantités δ, la grandeur totale s des intervalles dans lesquels les oscillations de la fonction sont plus grandes qu'une quantité donnée σ peut toujours être rendue infiniment petite, la somme S *converge quand tous les δ tendent vers zéro.*

Car ces intervalles, dans lesquels les oscillations sont plus grandes que σ, apportent à la somme $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ une contribution plus petite que s multiplié par la plus grande oscillation de la fonction entre a et b, oscillation qui est finie par hypothèse : les autres intervalles donnent dans la somme une partie plus petite que $\sigma(b-a)$; on peut prendre évidemment σ aussi petit qu'on le veut, et, alors, par hypothèse, on peut déterminer la grandeur des intervalles, de telle manière que s soit aussi petit qu'on le veut.

On peut donc rendre $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ aussi petit qu'on le veut, et, par suite, renfermer la somme S entre des limites aussi rapprochées qu'on le voudra.

Nous avons donc trouvé les conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que la somme S converge, quand les intervalles δ tendent vers zéro, et, par suite, pour qu'il puisse être question, dans le sens restreint, de l'intégrale de la fonction $f(x)$ entre les limites a et b [2].

Si l'on étend, comme nous l'avons indiqué plus haut, la notion d'intégrale aux cas où la fonction devient infinie, pour que l'intégration soit possible, il faudra encore que la seconde des conditions trouvées ci-dessus soit satisfaite ; mais à la place de la première, à savoir que la fonction demeure toujours finie, il faudra faire intervenir la suivante : que la fonction ne devienne infinie que lorsque son argument s'approche de certaines valeurs particulières, et que l'on obtienne une valeur limite parfaitement déterminée, quand les limites des intégrations s'approchent indéfiniment de ces valeurs pour lesquelles la fonction devient infinie.

§ VI.

Après avoir trouvé les conditions pour la possibilité d'une intégrale définie d'une manière générale, c'est-à-dire sans hypothèse particulière sur la nature de la fonction à intégrer, nous devons en partie appliquer, en partie poursuivre cette recherche en particulier pour les fonctions qui, entre deux limites aussi rapprochées qu'on le veut, deviennent discontinues un nombre infini de fois.

Comme ces fonctions n'ont pas encore été considérées, il sera bon de partir d'un exemple particulier. Désignons, pour abréger, par (x) l'excès de x sur le nombre entier le plus voisin, ou zéro si x est à égale distance des deux nombres entiers les plus voisins. Soient d'ailleurs n un entier et p un entier impair, et formons la série

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \ldots = \sum_1^\infty \frac{(nx)}{n^2}.$$

Cette série converge, comme il est facile de le voir, pour toutes les valeurs de x; sa valeur, toutes les fois que l'argument tend d'une manière continue vers une valeur x, soit par des valeurs décroissantes, soit par des valeurs croissantes, tend vrrs une limite fixe, et l'on a, si $x = \frac{p}{2n}$ (p et n étant premiers entee eux),

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

Pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas de la forme $\frac{p}{2n}$, on a

$$f(x+0) = f(x), \qquad f(x-0) = f(x).$$

Cette fonction est donc discontinue pour toute valeur rationnelle de x qui, réduite à sa plus simple expression, a un dénominateur pair; elle est donc discontinue un nombre infini de fois dans un intervalle, si petit qu'il soit, mais *de telle manière* que le nombre des variations brusques qui sont supérieures à une grandeur donnée est toujours fini. Elle est pourtant susceptible d'intégration. Cela résulte, en effet, de ce que, outre qu'elle est une valeur finie, cette fonction jouit des deux propriétés suivantes : que pour chaque valeur de x, il y a de part et d'autre une valeur limite $f(x+0)$ et $f(x-0)$, et que le nombre des variations brusques qui sont plus grandes qu'une quantité donnée σ est toujours fini. Alors, si nous appliquons les méthodes des articles précédents, nous pourrons prendre d assez petit pour que, dans chacun des intervalles qui ne renferment pas de ces variations brusques, les oscillations soient plus petites que σ, et que la grandeur totale des intervalles qui contiennent ces variations brusques soit aussi petite qu'on le voudra.

Il importe de remarquer que les fonctions qui n'ont pas un nombre infini de maxima et de minima (auxquelles d'ailleurs n'appartient pas la fonction que l'on vient de considérer) possèdent toujours ces deux propriétés là où elles ne deviennent pas infinies, et, par suite, qu'elles sont susceptibles d'une intégration, comme il est facile de le montrer directement [3].

Si nous passons maintenant à l'examen détaillé du cas où la fonction à intégrer devient infinie pour une valeur particulière de x, nous pouvons supposer que cela ait lieu pour $x=0$, et de telle manière que, pour x positif décroissant, la valeur de la fonction dépasse toute grandeur donnée.

On démontre d'abord facilement que $xf(x)$ ne peut pas, quand x décroît à partir de a, demeurer constamment supérieur à une quantité finie c; car on aurait alors

$$\int_x^a f(x)\,dx > c\int_x^a \frac{dx}{x},$$

et, par suite,

$$\int_x^a f(x)\,dx > c\left(\log\frac{1}{x} - \log\frac{1}{a}\right),$$

quantité qui croît indéfiniment quand x tend vers zéro : donc, si la fonction n'a pas un nombre infini de maxima et de minima dans le voisinage de $x = 0$, il faut nécessairement que $xf(x)$ devienne infiniment petit avec x, pour que la fonction $f(x)$ soit susceptible d'intégration. Si, d'autre part,

$$f(x)\,x^\alpha = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{d(x^{1-\alpha})},$$

pour une valeur de $\alpha < 1$, est infiniment petit avec x, il est clair que l'intégrale converge, quand sa limite inférieure tend vers zéro.

On trouve de même que, dans le cas de la convergence de l'intégrale, les fonctions

$$f(x)x\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\frac{1}{x}},$$

$$f(x)x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\log\frac{1}{x}}, \quad \ldots,$$

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x}\ldots\log^{n-1}\frac{1}{x}\log^n\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log^{n+1}\frac{1}{x}}$$

ne peuvent, lorsque x décroît à partir d'une limite finie jusqu'à zéro, demeurer plus grandes qu'une quantité finie, et, par suite, que, si elles n'ont pas un nombre infini de maxima et de minima, elles doivent devenir infiniment petites avec x; qu'au contraire l'intégrale converge, quand sa limite inférieure tend vers zéro, toutes les fois que l'expression

$$f(x)x\log\frac{1}{x}\ldots\log^{n-1}\frac{1}{x}\left(\log^n\frac{1}{x}\right)^\alpha = \frac{f(x)\,dx(1-\alpha)}{-d\left(\log^n\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}},$$

pour $\alpha < 1$, devient infiniment petite avec x.

Mais si la fonction $f(x)$ a, dans le voisinage de zéro, un nombre infini de maxima et de minima, on ne peut rien déterminer sur son ordre de grandeur dans le voisinage de zéro. En effet, supposons que les valeurs absolues de la fonction et, par conséquent, son ordre de grandeur soient donnés. On pourra toujours disposer des signes de telle manière que l'intégrale $\int f(x)\,dx$ converge, quand sa limite inférieure décroît. On peut prendre comme exemple d'une telle fonction, qui devient infinie, et de telle manière que son ordre $\left(\text{l'ordre de } \frac{1}{x} \text{ étant pris pour unité}\right)$ soit infiniment grand, la fonction suivante :

$$\frac{\left[d\cos x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right]}{dx} = \cos e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}} \sin e^{\frac{1}{x}}.$$

Nous nous contenterons de ce qui vient d'être dit sur cet objet, qui appartient à une autre branche de l'Analyse ; nous allons maintenant aborder le problème spécial que nous nous sommes proposé : la recherche générale des conditions sous lesquelles une fonction peut être représentée par une série trigonométrique.

Étude sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, sans faire aucune supposition sur la nature de la fonction.

§ VII.

Les travaux que nous avons signalés sur cette question avaient pour but de démontrer la série de Fourier pour les fonctions que l'on rencontre en Physique mathématique ; on pouvait donc commencer la démonstration pour des fonctions tout à fait arbitraires, et ensuite soumettre la marche de la fonction à des restrictions quelconques, nécessaires pour la démonstration, si ces restrictions n'allaient pas contre le but que l'on s'était proposé, et convenaient aux fonctions que l'on avait en vue. Dans notre problème, la seule condition que nous imposerons aux fonctions, c'est de pouvoir être représentées par une série trigonométrique ; nous rechercherons donc les conditions nécessaires et suffisantes pour un tel mode de développement des fonctions. Tandis que les travaux antérieurs établissaient des propositions de ce genre : « si une fonction jouit de telle et telle propriété, elle peut être développée en une série de Fourier », nous nous proposons la question inverse : « si une fonction est développable en une série de Fourier, que résulte-t-il de là sur la marche de cette fonction, sur la variation de sa valeur, quand l'argument varie d'une manière continue? »

A cet effet, considérons la série

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots,$$

ou, si pour abréger nous posons

$$\frac{1}{2} b_0 = A_0, \quad a_1 \sin x + b_1 \cos x = A_1, \quad a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \quad \ldots,$$

la série

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots,$$

que nous supposons donnée. Nous désignerons cette série par Ω, et sa valeur par $f(x)$, en sorte que cette fonction est déterminée seulement pour les valeurs de x qui rendent la série convergente.

Il est nécessaire, pour la convergence de la série, que ses termes finissent par devenir infiniment petits. Si les coefficients a_n, b_n tendent vers zéro pour n croissant à l'infini, les termes de la série Ω finiront par devenir infiniment petits, quel que soit x; sinon, ils ne pourront le devenir que pour des valeurs particulières de x. Les deux cas doivent être traités séparément.

§ VIII.

Supposons d'abord que les termes de la série Ω finissent par devenir infiniment petits, quel que soit x.

Dans cette hypothèse, la série

$$C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \ldots = F(x)$$

qu'on déduit de Ω, en intégrant deux fois consécutivement chaque terme, sera convergente, quel que soit x. Sa valeur $F(x)$ varie d'une manière continue avec x, et cette fonction $F(x)$ est, par suite, toujours susceptible d'intégration.

Pour reconnaître à la fois la convergence de la série et la continuité de la fonction $F(x)$, désignons la somme des termes jusqu'à

$-\frac{A_n}{n^2}$ par N; le reste de la série, c'est-à-dire la série

$$-\frac{A_{n+1}}{(n+1)^2}-\frac{A_{n+2}}{(n+2)^2}-\ldots,$$

par R, et la plus grande valeur de A_m, pour $m > n$, par ε. La valeur de R, quelque loin qu'on prolonge cette série, est évidemment plus petite, abstraction faite du signe, que

$$\varepsilon\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right]<\frac{\varepsilon}{n},$$

et, par suite, R peut être renfermé entre des limites aussi petites qu'on le veut, quand n prend des valeurs suffisamment grandes; donc la série est convergente. De plus, la fonction F est continue, c'est-à-dire que son accroissement peut être rendu aussi petit qu'on le veut, en assignant à x un accroissement suffisamment petit; car l'accroissement de $F(x)$ se compose de deux parties : celui de N et celui de R; or on peut prendre d'abord n assez grand pour que R, quel que soit x, soit aussi petit qu'on le veut, et, par conséquent, pour que l'accroissement de R, pour chaque accroissement de x, soit infiniment petit; et ensuite on peut prendre l'accroissement de x assez petit pour que celui de N soit au-dessous de toute quantité donnée.

Il sera bon de présenter maintenant, sur la fonction $F(x)$, quelques théorèmes dont la démonstration interromprait la suite de notre étude.

Théorème I. — *Quand la série Ω est convergente, l'expression*

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

où α et β sont des infiniment petits dont le rapport est fini, converge vers la même limite que la série.

En effet, on a

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$
$$=A_0+A_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}+A_2\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\frac{\sin 2\beta}{2\beta}+A_3\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}\frac{\sin 3\beta}{3\beta}+\ldots,$$

ou, pour traiter d'abord le cas plus simple où $\alpha = \beta$,

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = A_0 + A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + A_2\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)^2 + \ldots$$

si la série infinie $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$ est désignée par $f(x)$, et que l'on fasse

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1} = f(x) + \varepsilon_n,$$

on doit pouvoir trouver, pour une grandeur donnée à volonté δ, une valeur m de n telle que, si $n > m$, ε_n devienne plus petit que δ. Prenons maintenant α assez petit pour que $m\alpha < \pi$; transformons, par la substitution

$$A_n = \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n,$$

la série

$$\sum_0^\infty A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

dans la suivante

$$f(x) + \sum_1^\infty \varepsilon_n \left\{ \left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right]^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \right\},$$

et partageons cette série en trois parties, en réunissant :

1° Tous les termes de rang 1 à m inclusivement;

2° Les termes de rang $m+1$, jusqu'au plus grand nombre entier, que nous désignerons par s, inférieur à $\frac{\pi}{\alpha}$;

3° Depuis $s+1$ jusqu'à l'infini.

La première partie se compose de termes variant d'une manière continue, et peut être rendue, par conséquent, aussi voisine qu'on le voudra de sa valeur limite zéro, si l'on prend α suffisamment petit.

La deuxième partie, comme le facteur de ε_m est toujours positif, est évidemment plus petite, abstraction faite du signe, que

$$\delta \left[\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2 \right].$$

Pour trouver enfin des limites entre lesquelles soit renfermée la troisième partie, décomposons son terme général en deux parties,

$$\varepsilon_n \left\{ \left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right]^2 - \left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right]^2 \right\},$$

et

$$\varepsilon_n \left\{ \left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right]^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \right\} = -\varepsilon_n \frac{\sin(2n-1)\alpha \sin\alpha}{(n\alpha)^2}.$$

Sous cette forme, il est clair que le terme général est plus petit que

$$\delta\left[\frac{1}{(n-1)^2\alpha^2} - \frac{1}{n^2\alpha^2}\right] + \frac{1}{n^2\alpha^2},$$

et, par suite, la somme depuis $s+1$ jusqu'à l'infini est plus petite que

$$\delta\left(\frac{1}{s^2\alpha^2} + \frac{1}{s\alpha}\right),$$

valeur qui, pour α infiniment petit, se transforme en

$$\delta\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right).$$

La série

$$\sum \varepsilon_n \left\{ \left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right]^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \right\}$$

approche donc, pour une valeur décroissante de α, d'une valeur limite qui n'est pas supérieure à

$$\delta\left(1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right),$$

et, par conséquent, qui est nulle; et, partant, l'expression

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}$$
$$= f(x) + \sum \varepsilon_n \left\{ \left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right]^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \right\}$$

converge, lorsque α décroît indéfiniment, vers la limite $f(x)$: ce qui démontre notre théorème pour $\alpha = \beta$.

Pour le démontrer dans le cas général, soit

$$F(x+\alpha+\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)^2[f(x)+\delta_1],$$
$$F(x+\alpha-\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha+\beta) = (\alpha-\beta)^2[f(x)+\delta_2],$$

d'où

$$\begin{aligned}&F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)\\&\quad=4\alpha\beta f(x)+(\alpha+\beta)^2\delta_1-(\alpha-\beta)^2\delta_2.\end{aligned}$$

Par suite de la démonstration déjà faite, δ_1 et δ_2 sont infiniment petits quand α et β le sont : donc il en sera de même de

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_1-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_2,$$

pourvu que les coefficients de δ_1 et de δ_2 ne deviennent pas infinis, ce qui n'a pas lieu si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ demeure fini; et, par suite,

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

converge vers $f(x)$. C. Q. F. D.

Théorème II.

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$

est toujours infiniment petit avec α.

Pour le démontrer, partageons la série $\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$ en trois groupes, dont le premier contienne tous les premiers termes jusqu'à un certain indice m, à partir duquel A_n demeure inférieur à ε; le second, tous les termes suivants pour lesquels $n\alpha$ est plus petit qu'une quantité déterminée c; le troisième, tous les autres termes de la série. Il est facile de voir que, si α décroît, la somme du premier groupe fini demeure finie, c'est-à-dire plus petite qu'une quantité déterminée Q; celle du second, plus petite que $\varepsilon\frac{c}{\alpha}$; celle du troisième, plus petite que $\varepsilon\sum_{c<n\alpha}\frac{1}{n^2\alpha^2}<\frac{g}{\alpha c}$.

Par suite,

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha},$$

qui est égal à

$$2\alpha\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2,$$

est inférieur à

$$2\left[Q\alpha + \varepsilon\left(c + \frac{1}{c}\right)\right],$$

d'où résulte le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Théorème III. — *Si l'on désigne par b et c deux constantes arbitraires, dont la plus grande est c, et par $\lambda(x)$ une fonction qui demeure finie entre b et c, et s'annule aux deux limites, dont la dérivée première ait les mêmes propriétés, et dont la dérivée seconde n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima, l'intégrale*

$$\mu^2 \int_b^c F(x) \cos \mu(x-a)\, \lambda(x)\, dx,$$

quand μ croît indéfiniment, devient plus petite que toute quantité donnée.

Remplaçons $F(x)$ par son expression en série dans l'intégrale précédente; nous obtiendrons pour cette intégrale la série

$$(\Phi) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu^2 \int_b^c \left(C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2}\right) \cos \mu(x-a)\, \lambda(x)\, dx \\ &- \sum_1^\infty \frac{\mu^2}{n^2} \int_b^c A_n \cos \mu(x-a)\, \lambda(x)\, dx. \end{aligned} \right.$$

$A_n \cos \mu(x-a)$ peut évidemment se décomposer en une somme de quatre termes,

$$\begin{aligned} &\cos(\mu+n)(x-a), \quad \sin(\mu+n)(x-a), \\ &\cos(\mu-n)(x-a), \quad \sin(\mu-n)(x-a); \end{aligned}$$

et, si l'on désigne par $B_{\mu+n}$ la somme des deux premiers, et par $B_{\mu-n}$ celle des deux derniers, on aura

$$A_n \cos \mu(x-a) = B_{\mu+n} + B_{\mu-n},$$

$$\frac{d^2 B_{\mu+n}}{dx^2} = -(\mu+n)^2 B_{\mu+n}, \qquad \frac{d^2 B_{\mu-n}}{dx^2} = -(\mu-n)^2 B_{\mu-n},$$

et $B_{\mu+n}$, $B_{\mu-n}$ deviendront infiniment petits, quand n croîtra indéfiniment.

Le terme général de la série (Φ),

$$-\frac{\mu^2}{n^2}\int_b^c A_n \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx,$$

peut donc s'écrire

$$\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c \frac{d^2 B_{\mu+n}}{dx^2}\lambda(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c \frac{d^2 B_{\mu-n}}{dx^2}\lambda(x)\,dx,$$

ou, en intégrant deux fois par parties, et considérant d'abord $\lambda(x)$, puis $\lambda'(x)$ comme constantes,

$$\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c B_{\mu+n}\lambda''(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c B_{\mu-n}\lambda''(x)\,dx,$$

puisque $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ deviennent nuls aux limites de l'intégration.

On s'assure facilement que $\int_b^c B_{\mu\pm n}\lambda''(x)\,dx$ devient infiniment petit, quel que soit n, si μ croît indéfiniment; car cette expression est composée des intégrales

$$\int_b^c \cos(\mu\pm n)(x-a)\,\lambda''(x)\,dx, \qquad \int_b^c \sin(\mu\pm n)(x-a)\,\lambda''(x)\,dx.$$

Si $\mu\pm n$ devient infini, ces intégrales deviennent infiniment petites; si, n devenant infini avec μ, $\mu\pm n$ reste fini, ce sont, au contraire, les coefficients de ces intégrales dans $B_{\mu\pm n}$ qui deviennent infiniment petits.

Pour la démonstration de notre théorème, il suffira donc évidemment de montrer que la somme

$$\sum \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2},$$

étendue à toutes les valeurs entières de n qui satisfont aux conditions

$$n<-c',\quad c''<n<\mu-c''',\quad \mu+c^{\text{IV}}<n,$$

pour des valeurs positives quelconques des quantités c, reste finie, quand μ devient infini; car, en faisant abstraction des termes pour lesquels

$$-c'<n<c'',\quad \mu-c'''<n<\mu+c^{\text{IV}},$$

qui sont en nombre fini et deviennent évidemment infiniment petits, il est clair que la série (Φ) demeure plus petite que la somme précédente, multipliée par la plus grande valeur de

$$\int_b^c \mathrm{B}_{\mu\pm n}\lambda''(x)\,dx,$$

qui est infiniment petite.

Maintenant, si les quantités c sont plus grandes que l'unité, la somme

$$\sum \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2} = \frac{1}{\mu}\sum \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^2\left(\frac{n}{\mu}\right)^2},$$

prise entre les limites précédentes, est plus petite que l'intégrale

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2},$$

étendue de $-\infty$ à $-\frac{c'-1}{\mu}$, de $\frac{c''-1}{\mu}$ à $1-\frac{c'''-1}{\mu}$, de $1+\frac{c^{\text{IV}}-1}{\mu}$ à $+\infty$; car si, en partant de zéro, on sépare l'intervalle entier de $-\infty$ à $+\infty$ en intervalles de la grandeur de $\frac{1}{\mu}$, et que l'on remplace partout la fonction sous le signe $\int$ par sa plus petite valeur dans l'intervalle considéré, on obtient, puisque la fonction n'a aucun maximum entre les limites de l'intégration, tous les termes de la série.

Si l'on effectue l'intégration, l'on trouve

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{\mu}\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+2\log x-2\log(1-x)\right]+\text{const.},$$

et, par suite, entre les limites déjà indiquées, une valeur qui ne devient pas infinie avec μ [4].

§ IX.

A l'aide de ces trois théorèmes, on peut énoncer les propositions suivantes, sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique dont les termes finissent par devenir infiniment petits pour toute valeur de l'argument.

I. Pour qu'une fonction périodique, ayant 2π pour période, puisse être représentée par une série trigonométrique dont les termes finissent par devenir infiniment petits pour toute valeur de x, il faut qu'il existe une fonction continue $F(x)$, dont $f(x)$ dépende de telle manière que l'expression

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

où α et β sont des infiniment petits dont le rapport est fini, converge vers $f(x)$.

Il faut, de plus, que l'intégrale

$$\mu^2\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx,$$

lorsque $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ sont nuls aux limites b, c, et demeurent finis entre ces limites, et que $\lambda''(x)$ n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, devienne infiniment petite quand μ augmente indéfiniment.

II. Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, il y a une série trigonométrique, dans laquelle les coefficients finissent par devenir infiniment petits, et qui représente la fonction toutes les fois qu'elle est convergente.

Déterminons, en effet, les quantités C', A_0, de telle manière que $F(x)-C'x-A_0\frac{x^2}{2}$ soit une fonction périodique, de période 2π, et développons cette fonction, d'après la méthode de Fourier, en la série trigonométrique

$$C-\frac{A_1}{1}-\frac{A_2}{4}-\frac{A_3}{9}-\ldots,$$

en faisant

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t)-C't-A_0\frac{t^2}{2}\right]dt=C,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t)-C't-A_0\frac{t^2}{2}\right]\cos n(x-t)\,dt=-\frac{A_n}{n^2};$$

alors, d'après ce qui précède,

$$A_n=-\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t)-C't-A_0\frac{t^2}{2}\right]\cos n(x-t)\,dt$$

deviendra toujours infiniment petit quand n croîtra, et, par suite, il résulte, du théorème I de l'article précédent, que la série

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots,$$

toutes les fois qu'elle sera convergente, aura pour somme $f(x)$ [5].

III. Soit $b < x < c$, et $\rho(t)$ une fonction telle que $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ aient, pour $t = b$ et pour $t = c$, la valeur zéro, et qu'elles soient continues entre ces limites; que $\rho''(t)$ n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima, et que d'ailleurs, pour $t = x$, on ait

$$\rho(t) = 1, \qquad \rho'(t) = 0, \qquad \rho''(t) = 0,$$

$\rho'''(t)$ et $\rho^{\text{iv}}(t)$ demeurant finies et continues; alors la différence entre la série $A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{d^2\,\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

devient toujours infiniment petite, quand n croît indéfiniment. La série sera donc convergente ou divergente, suivant que l'intégrale précédente tendra ou ne tendra pas vers une limite fixe, quand n croîtra indéfiniment.

Pour établir cette proposition, remarquons que l'on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - \frac{A_0 t^2}{2}\right]\sum_1^n - n^2\cos n(x-t)\,dt,$$

ou, à cause de

$$2\sum_1^n - n^2\cos n(x-t) = 2\sum_1^n \frac{d^2\cos n(x-t)}{dt^2} = \frac{d^2\,\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2},$$

$$A_1 + \ldots + A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - \frac{A_0 t^2}{2}\right]\frac{d^2\,\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,dt.$$

Or, d'après le théorème III du paragraphe précédent, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t)-C't-A_0\frac{t^2}{2}\right]\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\lambda(t)\,dt$$

devient infiniment petite quand n croît indéfiniment, si $\lambda(t)$ demeure continue, ainsi que sa dérivée première, si $\lambda''(t)$ n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, et si, pour $t=x$, on a

$$\lambda(t)=0,\qquad \lambda'(t)=0,\qquad \lambda''(t)=0,$$

$\lambda'''(t)$ et $\lambda^{\text{IV}}(t)$ demeurant finies et continues [6].

Cela posé, si l'on prend $\lambda(t)$ égal à 1, en dehors des limites b, c, et à $1-\rho(t)$, entre ces limites, ce qui est évidemment permis, il résulte de là que la différence entre la série $A_1+\ldots+A_n$ et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{c}\left[F(t)-C't-A_0\frac{t^2}{2}\right]\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\rho(t)\,dt$$

devient toujours infiniment petite, quand n croît indéfiniment. On vérifie facilement, au moyen d'une intégration par parties, que le terme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{c}\left(C't+A_0\frac{t^2}{2}\right)\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\rho(t)\,dt$$

tend vers A_0, quand n devient infini, d'où résulte la démonstration du théorème proposé.

§ X.

Il résulte des recherches précédentes que, si les coefficients de la série Ω finissent par devenir infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, la convergence de la série, pour une valeur déterminée de x, dépend seulement de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage immédiat de cette valeur.

Pour reconnaître si les coefficients de la série deviennent toujours infiniment petits, on ne pourra pas toujours partir de leur expression par des intégrales définies, et l'on devra avoir recours à d'autres méthodes. Il importe cependant de considérer à part un cas où cette propriété résulte immédiatement de la nature de la fonction, à savoir : celui où la fonction $f(x)$ demeure toujours finie et est susceptible d'intégration.

Dans ce cas, si l'on sépare l'intervalle complet de $-\pi$ à $+\pi$ en petits intervalles de grandeurs δ_1, δ_2, δ_3, ..., et si l'on désigne par D_1, D_2, D_3, ... les plus grandes oscillations de la fonction dans ces intervalles, la somme

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \ldots$$

devra devenir infiniment petite, quand tous les δ tendront vers zéro.

Cela posé, si l'on partage l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx,$$

qui représente, au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, les différents coefficients de la série, ou, ce qui est la même chose, l'intégrale

$$\int_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx,$$

prise à partir de $x=a$, en intégrales partielles correspondant à des intervalles égaux à $\frac{2\pi}{n}$, alors chacune d'elles fournit à la somme une portion plus petite que $\frac{2}{n}$ multiplié par la plus grande oscillation dans son intervalle, et leur somme est plus petite qu'une grandeur qui, d'après les hypothèses, devient infiniment petite avec $\frac{2\pi}{n}$.

En effet, ces intégrales sont de la forme

$$\int_{a+s\frac{\pi}{n}}^{a+(s+1)\frac{\pi}{n}} f(x) \sin n(x-a)\, dx.$$

Le sinus est positif dans la première moitié de l'intervalle, et négatif dans la seconde. Si donc on désigne par M la plus grande valeur de $f(x)$ dans cet intervalle, par m la plus petite, il est clair qu'on augmente l'intégrale si, dans la première moitié de l'intervalle, on remplace $f(x)$ par M, et dans la seconde moitié par m, et que l'on diminue l'intégrale si, dans la première moitié, on remplace $f(x)$ par m, et dans la seconde par M. Dans le premier cas, on obtient

$$\frac{2}{n}(\mathrm{M}-m),$$

et, dans le second,

$$\frac{2}{n}(m-\mathrm{M}).$$

L'intégrale, abstraction faite du signe, est donc plus petite que

$$\frac{2}{n}(\mathrm{M}-m).$$

et, par suite, l'intégrale

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin n(x-a)\,dx$$

est plus petite que

$$\frac{2}{n}(\mathrm{M}_1-m_1)+\frac{2}{n}(\mathrm{M}_2-m_2)+\ldots,$$

si l'on désigne par M_s et m_s la plus grande et la plus petite valeur de $f(x)$ dans le $s^{\text{ième}}$ intervalle. Cette somme, puisque $f(x)$ est susceptible d'intégration, doit devenir infiniment petite toutes les fois que l'intervalle $\frac{2\pi}{n}$ tend vers zéro.

Donc, dans le cas que nous avons supposé, les termes deviendront infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, quel que soit x.

§ XI.

Il reste encore à examiner le cas où les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour une valeur de l'argument x, sans que cela ait lieu pour toute valeur de cet argument. Ce cas peut se ramener au précédent.

Si, dans les séries relatives aux valeurs de l'argument $x+t$ et $x-t$, on additionne les termes de même rang, on obtient la série

$$2A_0 + 2A_1 \cos t + 2A_2 \cos 2t + \ldots,$$

dans laquelle les termes deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de t, et à laquelle on peut, par conséquent, appliquer les méthodes des articles précédents.

Désignons, pour cela, par $G(t)$ la valeur de la série infinie

$$C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} + A_0 \frac{t^2}{2} - A_1 \frac{\cos t}{1} - A_2 \frac{\cos 2t}{4} - A_3 \frac{\cos 3t}{9} - \ldots,$$

de telle manière que $\frac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$ soit égal à $G(t)$ pour toutes les valeurs de t pour lesquelles les séries qui représentent $F(x+t)$ et $F(x-t)$ sont convergentes. On aura alors les propositions suivantes :

I. Si les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x, alors la fonction

$$\mu^2 \int_c^b G(t) \cos\mu(t-a)\, \lambda(t)\, dt,$$

$\lambda(t)$ étant une fonction définie comme précédemment (§ IX), devient infiniment petite quand μ croît au delà de toute limite. La valeur de l'intégrale se compose de deux parties

$$\frac{\mu^2}{2} \int_c^b F(x+t) \cos\mu(t-a)\, \lambda(t)\, dt,$$
$$\frac{\mu^2}{2} \int_c^b F(x-t) \cos\mu(t-a)\, \lambda(t)\, dt,$$

toutes les fois que ces deux intégrales ont une valeur déterminée. La valeur de l'intégrale est donc rendue infiniment petite par la manière dont se comporte la fonction F en deux points situés symétriquement au-dessus et au-dessous de x. Il faut d'ailleurs remarquer qu'il doit exister, dans le cas actuel, des points pour lesquels chacune de ces parties, considérée en elle-même, ne devient pas infiniment petite; car, autrement, tous les termes de la série Ω finiraient par devenir infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de l'argument x. Par conséquent, les valeurs correspondant à ces deux points, situés symétriquement par rapport à x, doivent alors se compenser, et cela de manière que leur somme tende vers zéro quand μ croît infiniment. Il s'ensuit que la série Ω ne peut être convergente que pour des valeurs de la quantité x pour lesquelles les points où

$$\mu^2 \int_b^c \mathrm{F}(x) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

n'est pas infiniment petit pour x infini sont situés symétriquement. Si le nombre de ces intervalles symétriques est infiniment grand, il résulte évidemment de ce qui précède que la série trigonométrique pourra converger pour une infinité de valeurs de x, sans que ses coefficients deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x.

Réciproquement, on a

$$\mathrm{A}_n = -\frac{2n^2}{\pi}\int_0^\pi \left[\mathrm{G}(t) - \mathrm{A}_0\frac{t^2}{2}\right] \cos nt\,dt,$$

et, par suite, A_n deviendra infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, toutes les fois que

$$\mu^2 \int_b^c \mathrm{G}(t) \cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt$$

deviendra infiniment petit quand μ dépassera toute limite.

II. Si les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour la valeur x de l'argument, la convergence ou la divergence de la série dépendra de la marche de la fonction $\mathrm{G}(t)$ pour une valeur infiniment petite de t et la différence entre

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 + \ldots + \mathrm{A}_n$$

et l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \mathrm{G}(t)\,\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

deviendra infiniment petite avec $\frac{1}{n}$, si b est une constante aussi petite qu'on le voudra, comprise entre zéro et π, et $\rho(t)$ une fonction telle que $\rho(t)$, $\rho'(t)$ soient toujours continues, et soient égales à zéro pour $t = b$, et qu'en outre $\rho''(t)$ n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima, et que, pour $t = 0$, on ait

$$\rho(t) = 0, \qquad \rho'(t) = 0, \qquad \rho''(t) = 0,$$

$\rho'''(t)$ et $\rho^{\text{IV}}(t)$ demeurant finies et continues.

§ XII.

Les conditions nécessaires à la représentation d'une fonction par une série trigonométrique peuvent bien être encore un peu restreintes, et, par suite, nos recherches peuvent être encore poussées plus avant, sans qu'il soit fait aucune hypothèse particulière sur la nature de la fonction. Par exemple, dans le dernier théorème obtenu, la condition que $\rho''(0) = 0$ peut être supprimée, si l'on remplace, dans l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \mathrm{G}(t)\,\frac{d^2\,\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt,$$

$\mathrm{G}(t)$ par $\mathrm{G}(t) - \mathrm{G}(0)$; mais on ne gagne ainsi rien d'essentiel.

Passons donc à la considération des cas particuliers, et proposons-nous d'indiquer, pour le cas où la fonction n'a pas un nombre infini de maxima ou de minima, les propositions complémentaires qu'on peut encore ajouter au travail de Dirichlet.

Il a été remarqué plus haut qu'une telle fonction peut toujours être intégrée partout où elle ne devient pas infinie, et il est évident qu'elle ne peut devenir infinie que pour un nombre limité de valeurs de l'argument. Dirichlet démontre aussi que, dans les expressions intégrales du $n^{\text{ième}}$ terme de la série et de la somme des n premiers termes, la portion de l'intégrale relative à tous les intervalles, à l'exception de ceux où la fonction devient infinie et de l'intervalle infiniment petit comprenant la valeur de l'argument x, devient infiniment petite, quand n croît indéfiniment, et que

$$\int_x^{a+b} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt,$$

où $0 < b < \pi$, et où $f(t)$ ne devient pas infini dans les limites de l'intégration, converge, pour n infini, vers $\pi f(x+0)$, et cette démonstration ne laisse rien à désirer, quand on supprime l'hypothèse inutile que $f(x)$ soit continu. Il reste seulement à rechercher dans quels cas les intégrales relatives aux intervalles infiniment petits, dans lesquels la fonction devient infinie, deviennent infiniment petites, quand n augmente indéfiniment. Cette recherche n'a pas été faite; mais Dirichlet a seulement fait voir, en passant, que cela a lieu dès que l'on suppose que la fonction à représenter est susceptible d'intégration; mais cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Nous avons vu plus haut que, si les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x, la fonction $F(x)$, dont $f(x)$ est la dérivée seconde, doit être finie et continue, et que

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

est toujours infiniment petit avec α. Si maintenant la fonction

$$F'(x+t) - F'(x-t)$$

n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, alors, quand t deviendra nul, elle devra tendre vers une limite finie L ou devenir infinie, et il est évident que

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} [F'(x+t) - F'(x-t)]\, dt = \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

devra de même converger vers L ou vers l'infini, et, par suite, que cette expression ne deviendra infiniment petite que si

$$F'(x+t) - F'(x-t)$$

a zéro pour limite. D'après cela, si $f(x)$ devient infini pour $x = a$, il faut que l'on puisse toujours intégrer $f(a+t)+f(a-t)$ jusqu'à $t=0$. Cela suffit pour que

$$\left(\int_b^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^c\right)dx\,f(x)\cos n(x-a)$$

converge lorsque ε tend vers zéro, et devienne infiniment petit quand n croît. Comme d'ailleurs la fonction $F(x)$ est finie et continue, $F'(x)$ doit être susceptible d'intégration jusqu'à $x=a$, et $(x-a)F'(x)$ devenir infiniment petit avec $x-a$, si cette fonction n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, d'où il suit que

$$\frac{d.(x-a)F'(x)}{dx}=(x-a)f(x)+F'(x),$$

et, partant, que $(x-a)f(x)$ pourra aussi être intégré jusqu'à $x=a$. D'après cela, $\int f(x)\sin n(x-a)\,dx$ peut aussi être intégré jusqu'à $x=a$, et pour que les coefficients de la série finissent par devenir infiniment petits, il suffira évidemment que l'intégrale

$$\int_b^c f(x)\sin n(x-a)\,dx,$$

où $b<a<c$, devienne infiniment petite quand n croît. Posons

$$f(x)(x-a)=\varphi(x);$$

alors, si cette fonction, comme on le suppose, n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, on aura, pour n infini,

$$\int_b^c f(x)\sin n(x-a)\,dx=\int_b^c\frac{\varphi(x)}{x-a}\sin n(x-a)\,dx$$
$$=\frac{\varphi(a+0)+\varphi(a-0)}{2},$$

comme Dirichlet l'a prouvé. En conséquence,

$$\varphi(a+t)+\varphi(a-t)=f(a+t)\,t-f(a-t)\,t$$

doit devenir infiniment petit avec t, et comme

$$f(a+t)+f(a-t)$$

peut être intégré jusqu'à $t = 0$ et que, par suite,

$$f(a+t)t + f(a-t)t$$

est infiniment petit avec t, on voit que $f(a+t)t$ et aussi $f(a-t)t$ doivent être infiniment petits avec t. En faisant abstraction des fonctions qui ont un nombre infini de maxima et de minima, nous voyons qu'il est nécessaire et suffisant, pour la représentation d'une fonction par une série trigonométrique dont les termes sont infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, que, si elle devient infinie pour $x = a$, $f(a+t)t$ et $f(a-t)t$ soient infiniment petits avec t, et que $f(a+t) + f(a-t)$ puisse être intégré jusqu'à $t = 0$.

Une série trigonométrique, dont les coefficients ne finissent pas par devenir infiniment petits, ne peut représenter que pour un nombre fini de valeurs de x une fonction qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, parce que

$$\mu^2 \int_b^c \mathrm{F}(x) \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

ne peut cesser d'être infiniment petit, pour μ infini, que pour un nombre limité de valeurs de x. Il est donc inutile d'insister sur cette hypothèse.

§ XIII.

Pour ce qui concerne les fonctions qui ont un nombre infini de maxima et de minima, il ne sera pas inutile de remarquer qu'une telle fonction $f(x)$ peut être susceptible d'une intégration, sans pouvoir être représentée par une série de Fourier [7]. Cela aura lieu, par exemple, si l'on a

$$f(x) = \frac{d\left(x^{\nu} \cos \frac{1}{x}\right)}{dx} \qquad \left(0 < \nu < \frac{1}{2}\right)$$

entre zéro et 2π. Car, dans l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos n(x-a)\,dx,$$

quand n croît, l'influence de l'intervalle où x est très voisin de $\sqrt{\frac{1}{n}}$ finit par devenir infiniment grande, en sorte que le rapport de cette intégrale à

$$\frac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{n} - na + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}\, n^{\frac{1-2\nu}{4}}$$

converge vers l'unité, comme on le trouvera en suivant une marche analogue à celle que nous allons indiquer. Pour généraliser l'exemple précédent, ce qui fera mieux ressortir la nature de la question, faisons

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x)\cos\psi(x),$$

en supposant $\varphi(x)$ infiniment petit et $\psi(x)$ infiniment grand, quand x tend vers zéro, ces fonctions étant d'ailleurs continues avec leurs dérivées, et n'ayant pas un nombre infini de maxima et de minima. On aura alors

$$f(x) = \varphi'(x)\cos\psi(x) - \varphi(x)\,\psi'(x)\sin\psi(x),$$

et $\int f(x)\cos n(x-a)\,dx$ sera égal à la somme des quatre intégrales

$$\frac{1}{2}\int \varphi'(x)\cos[\psi(x) \pm n(x-a)]\,dx,$$

$$-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\,\psi'(x)\sin[\psi(x) \pm n(x-a)]\,dx.$$

$\psi(x)$ étant supposé positif, considérons le terme

$$-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\,\psi'(x)\sin[\psi(x) + n(x-a)]\,dx,$$

et recherchons dans cet intervalle la place où les changements de signe du sinus se succèdent le plus lentement possible. Si l'on pose

$$\psi(x) + n(x-a) = y,$$

cela aura lieu dans le voisinage des valeurs de x où $\frac{dy}{dx} = 0$, et par suite

$$\psi'(\alpha) + n = 0,$$

en remplaçant x par α. Étudions donc la marche de l'intégrale

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\psi'(x)\sin y\,dx,$$

pour le cas où ε est infiniment petit pour n infini, et introduisons y comme variable. Posons

$$\psi(\alpha)+n(\alpha-a)=\beta;$$

alors on a, pour ε suffisamment petit,

$$y=\beta+\psi''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}+\ldots,$$

et $\psi''(\alpha)$ est positif, puisque $\psi(x)$ est infini positif pour x infiniment petit. On a d'ailleurs

$$\frac{dy}{dx}=\psi''(\alpha)(x-\alpha)=\pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)},$$

suivant que $x-\alpha \gtrless 0$, et

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}&\varphi(x)\psi'(x)\sin y\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\int_{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}^{\beta}-\int_{\beta}^{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}\right)\frac{\sin y\,dy}{\sqrt{y-\beta}}\,\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}\\
&=-\int_0^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}\,\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.
\end{aligned}$$

Si l'on fait décroître la quantité ε pour n croissant, de telle manière que $\psi''(\alpha)\varepsilon^2$ devienne infini, alors, en supposant que

$$\int_0^{\infty}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

qui est égal, comme on sait, à $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}$, ne soit pas nul, et en faisant abstraction de quantités négligeables, on aura

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}&\varphi(x)\psi'(x)\sin[\psi(x)+n(x-a)]\,dx\\
&=-\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\pi}.\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.
\end{aligned}$$

Si donc cette dernière grandeur ne devient pas infiniment petite, comme l'intégrale relative aux autres intervalles tend vers zéro, le rapport de $\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ à cette même quantité converge vers l'unité.

Si l'on suppose que $\varphi(x)$ et $\psi'(x)$ soient, pour x infiniment petit, du même ordre que certaines puissances de x, savoir, $\varphi(x)$ de l'ordre de x^{ν}, $\psi'(x)$ de celui de $x^{-\mu-1}$, où $\nu > 0$, $\mu \geqq 0$, alors, pour n infini,

$$\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{2\sqrt{\psi''(\alpha)}}$$

sera de l'ordre de $\alpha^{\nu-\frac{\mu}{2}}$, et, par suite, ne sera pas infiniment petit si $\mu \geqq 2\nu$. Mais, en général, si $x\psi'(x)$ ou, ce qui est la même chose, si $\frac{\psi(x)}{\log x}$ devient infiniment grand pour x infiniment petit, on pourra toujours choisir $\varphi(x)$ de telle manière que $x\varphi(x)$ soit infiniment petit avec x, et que

$$\varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2\psi''(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\psi'(x)}}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\dfrac{1}{x\psi'(x)}}}$$

devienne infiniment grand, et, par suite, l'intégrale $\int_x f(x)\,dx$ peut être prise à partir de zéro, sans que $\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ devienne infiniment petite quand n croît indéfiniment. Comme on le voit, dans l'intégrale $\int_x f(x)\,dx$, les accroissements de l'intégrale, quand x tend vers zéro, se compensent, quoique leur rapport à la variation de x croisse très rapidement pendant les rapides changements de signe de la fonction; par l'introduction du facteur $\cos n(x-a)$, on obtient ce résultat, que les accroissements de l'intégrale s'ajoutent en valeur les uns aux autres.

De même que nous venons de voir que, pour une fonction toujours susceptible d'intégration, la série de Fourier peut n'être pas convergente, et que les termes de cette série peuvent devenir infiniment grands avec n, de même aussi on peut indiquer des fonctions qui ne sont jamais susceptibles d'intégration, et pour lesquelles la série Ω converge pour une infinité de valeurs de x prises entre deux valeurs aussi rapprochées qu'on le veut.

On a un exemple de ce nouveau cas dans la fonction représentée par la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(nx)}{n},$$

où (nx) a la même signification qu'au § VI. Cette fonction existe pour toute valeur rationnelle de x, et est représentée par la série trigonométrique

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\Sigma_\theta[-(-1)^\theta]}{n\pi} \sin 2n x\pi \quad [8],$$

où l'on doit mettre à la place de θ tous les diviseurs de n, mais qui ne reste comprise entre des limites finies dans aucun intervalle, si petit qu'il soit, et, par conséquent, n'est susceptible d'aucune intégration.

On obtient un exemple du même genre lorsque, dans les séries

$$\sum_{0}^{\infty} c_n \cos n^2 x, \qquad \sum_{1}^{\infty} c_n \sin n^2 x,$$

on met, pour $c_0, c_1, c_2, \ldots$, des quantités positives toujours décroissantes et devenant infiniment petites, mais pour lesquelles $\sum_{1}^{n}{}_{s} c_s$ devient infiniment grand. Car, si le rapport de x à 2π est rationnel, et s'il a pour dénominateur m, quand il est réduit à sa plus simple expression, ces séries seront évidemment convergentes ou divergentes, suivant que

$$\sum_{0}^{m-1} \cos n^2 x, \qquad \sum_{0}^{m-1} \sin n^2 x$$

seront égaux à zéro ou différents de zéro. Les deux cas se présentent, d'après un théorème connu de la division du cercle ([1]), pour une infinité de valeurs de x, comprises entre des limites aussi rapprochées qu'on le veut.

([1]) *Disquisit. arithm.*, p. 636, art. 356.

La série Ω peut aussi converger dans un intervalle aussi grand qu'on le veut, sans que la valeur de la série

$$C' + A_0 x - \sum \frac{\frac{dA_n}{dx}}{n^2},$$

que l'on obtient par l'intégration de chaque terme de Ω, puisse être intégrée dans un intervalle aussi petit que l'on voudra.

Considérons, par exemple, l'expression

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}(1 - q^n) \log\left[\frac{-\log(1 - q^n)}{q^n}\right],$$

où l'on prend les logarithmes de telle manière qu'ils s'évanouissent pour $q = 0$, et développons-la suivant les puissances ascendantes de q, en y remplaçant q par e^{xi}; la partie imaginaire du développement forme une série trigonométrique qui, différentiée deux fois par rapport à x, converge un nombre infini de fois dans chaque intervalle, tandis que son premier quotient différentiel devient nul un nombre infini de fois.

Une série trigonométrique peut aussi converger un nombre infini de fois dans un intervalle aussi petit qu'on le veut, sans que ses termes deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x. Un exemple simple est fourni par la série

$$\sum_1^\infty \sin(n!)\, x\pi,$$

où $n!$ désigne, comme d'habitude, le produit $1.2.3\ldots n$. Cette série converge non seulement pour toute valeur rationnelle de x, puisqu'elle est alors limitée, mais aussi pour un nombre infini de valeurs irrationnelles, dont les plus simples sont $\sin 1$, $\cos 1$, $\frac{2}{e}$, et leurs multiples, et, en outre, les multiples impairs de e, de $\frac{e - \frac{1}{e}}{4}$, etc. [9].

TABLE DES MATIÈRES.

NOTES.

[1] (p. 237). Supposons que la fonction $f(x)$ ne croisse pas dans l'intervalle Δ entre x et $x_1 > x$, et désignons par g la limite supérieure des valeurs que prend $f(x+\xi)$ pour $0 < \xi < \Delta$, c'est-à-dire une valeur qui n'est surpassée par aucune de ces valeurs fonctionnelles, mais qui peut être atteinte avec tout degré quelconque d'approximation; ceci posé, $g - f(x+\xi)$ ne diminuera jamais pour ξ croissant, mais devra néanmoins encore être infiniment petit, c'est-à-dire que l'on aura

$$\lim_{\xi=0}[g - f(x+\xi)] = 0, \qquad g = f(x+0).$$

Le théorème qu'un système Σ de nombres réels, dont les individus, se présentant en nombre s fini ou infini, ne peuvent surpasser une valeur numérique finie, possède une limite supérieure, est, il est vrai, énoncé avec précision et démontré pour la première fois par Weierstrass (comparer O. Biermann, *Théorie des Fonctions analytiques*, § 16; Leipzig, Teubner). La démonstration, basée sur les intuitions de Dedekind relatives aux nombres irrationnels (*Continuité et nombres irrationnels*, Brunswick, 1872; Vieweg), est très simple. En effet, si l'on partage la suite des nombres réels en deux parties A et B, de telle sorte que chaque nombre a de A soit surpassé par des nombres du système Σ, et que chaque nombre b de B ne le soit pas, ces deux parties A et B sont séparées par un nombre existant g qui possède évidemment les attributs caractéristiques de la limite supérieure de Σ.

[2] (p. 242). Ici se place un fragment de note de la main de Riemann, que nous chercherons à exposer comme il suit, car cela est nécessaire pour compléter la démonstration que l'évanouissement de Δ avec d est aussi la