À la recherche de la genèse du dernier mémoire mathématique de Georg Cantor : Du côté de chez Franz Goldscheider (lettre de Cantor du 18 juin 1886)

Anne-Marie Décaillot

Equipe REHSEIS (CNRS, Université Paris-Diderot)

31 octobre 2008

1 Présentation

Franz Goldscheider (1852-1926) est un « ancien élève » de Cantor, professeur de mathématiques dans un lycée de Berlin [1]. La lettre de Cantor du 18 juin 1886, dont nous donnons ci-dessous une traduction française [2], est la première manifestation connue d'un échange entre les deux mathématiciens, qui se poursuivra de 1886 à 1888 [3].

Cette première lettre constitue un véritable exposé introductif des fondements de la théorie cantorienne des ensembles. Elle sera bientôt suivie d'une autre lettre où Cantor, répondant à certaines questions de son interlocuteur, exprime sa joie : « *da ich so glücklich bin, Ihr Interesse für das mir noch so dunkle Gebiet der zweiten Zahlenklasse erweckt zu haben* » [4] (« car je suis si

1. Lettre de Cantor à Vivanti du 30/ 01/1888 [Cantor 1991, p. 300].
2. La version allemande est publiée dans [Meschkowski 1961, 2$^{\text{è}}$édition p. 189-196].
3. Voir par exemple les lettres de Cantor à Goldscheider du 11/10/1886, 3/04/1888 et 9/04/1888 dans [Cantor 1991, p. 263-266, 307-313].
4. [Cantor 1991, p. 263].

heureux d'avoir éveillé votre intérêt pour le domaine encore si obscur pour moi des nombres de la deuxième classe »). À ce propos, Cantor reconnaît suivre la tendance « égoïste » qui consiste à attirer le jeune mathématicien vers une collaboration en un domaine où la finesse de son interlocuteur permet un approfondissement scientifique. Cette attitude deviendra perceptible dans les lettres ultérieures ; les échanges perdront alors leur caractère de « leçon » de maître à élève pour se rapprocher d'une recherche commune.

Afin de mieux comprendre la nature de cette correspondance, il nous faut examiner la situation scientifique de Cantor en cette année 1886. Ce dernier est professeur à l'Université de Halle depuis 1869, où il a succédé à Hermann Schwarz auprès d'Eduard Heine, mais il n'est titulaire que depuis 1879. Une grande partie des recherches qui l'on conduit à l'étude de l'infini mathématique et à la toute récente « théorie des ensembles » est déjà parue dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* et dans les *Mathematische Annalen*. Le monumental mémoire « Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten » (« Sur les ensembles infinis linéaires de points ») a été en particulier publié en six parties dans les *Mathematische Annalen* entre 1879 et 1884. En 1883, le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler, ami de Cantor, a ouvert la revue *Acta Mathematica* qu'il dirige à la traduction en langue française de l'essentiel de ces travaux.

Ces traductions ont été effectuées sous la responsabilité d'une équipe française comprenant les mathématiciens Charles Hermite, Henri Poincaré, Paul Appell, Émile Picard. Les Français sont sensibles à la nouvelle vision de la théorie des fonctions que permettent les travaux de Cantor concernant les « ensembles linéaires de points ». Par contre le développement, ébauché dans les *Grundlagen*[5], d'une théorie des ensembles abstraits, conduisant aux notions de « type d'ordre » d'un ensemble bien ordonné ou de nombre ordinal transfini, est loin d'entraîner l'adhésion des scientifiques français. Henri Poincaré, qui pourtant utilise les classifications cantoriennes des ensembles infinis de points pour ses propres recherches, critique vertement les *Grundlagen* pour « le défaut d'exemples un peu concrets » ; de ce fait, les nombres de la deuxième et surtout de la troisième classe ont un peu l'air d'« une forme sans matière » [6].

Mittag-Leffler n'est pas insensible à ces critiques. Aussi lorsque Cantor lui présente en 1885 un nouveau mémoire intitulé « Principien einer Theorie der Ordnungstypen » (« Principes

5. [Cantor 1883a], publié aussi sous la forme [Cantor 1883b].
6. Lettre de Poincaré à Mittag-Leffler, 16 mars 1883 [Dugac 1976, p. 156].

d'une théorie des types d'ordre ») [7], il lui oppose un refus catégorique au prétexte que son travail serait trop en avance sur son époque et il lui conseille de ne pas publier ses travaux avant d'avoir obtenu des résultats positifs liés à la théorie des types d'ordre. Ce refus va entraîner la rupture immédiate entre les deux scientifiques. Cantor se détourne alors pendant près de 10 ans des revues de mathématiques. Il publie essentiellement dans des revues philosophiques, comme le *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, et les revues associatives comme le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (revue de la DMV) et, en France, les *Comptes rendus* de l'*Association française pour l'avancement des sciences* (AFAS). L'investissement de Cantor dans la vie associative va le conduire à préparer activement le premier congrès international des mathématiciens (Zurich 1897).

Nous voyons Cantor soucieux de tisser des liens avec des milieux autres que les milieux académiques : il s'agit des philosophes et des théologiens lecteurs de la revue de philosophie allemande, de jeunes professeurs membres de la DMV, et, en France, des « amateurs » de mathématiques de l'AFAS, ou de jeunes chercheurs en formation à l'École normale supérieure.

Dans cette recherche d'interlocuteurs scientifiques nouveaux, la correspondance avec Franz Goldscheider prend tout son sens. Cantor veut diffuser sa théorie des ensembles auprès des enseignants nouvellement formés, avec l'espoir d'en faire d'ardents défenseurs des idées fondamentales qu'elle contient. Franz Goldscheider est en ce sens un interlocuteur privilégié. Son intérêt pour les thèses de Cantor, ses interrogations, ses incompréhensions peut-être vont conduire le mathématicien allemand à élucider la présentation assez confuse des transfinis qu'il a adoptée dans les *Grundlagen*.

Avec la lettre du 18 juin 1886 nous sommes au tout début de ce long processus. Le soin pédagogique de l'auteur est évident. Cantor a-t-il eu vent des critiques de Poincaré ? En tout état de cause la qualité des exemples qu'il avance afin de rendre accessibles ses innovations est digne d'attention. Mais Cantor va au delà du seul souci pédagogique, puisque l'essentiel du raisonnement et des exemples développés dans cette lettre vont se retrouver dans l'article philosophique « Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten » (Communications sur la théorie des transfinis ») [8] publié en 1887-1888 dans le *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*.

7. Voir à ce propos [Grattan-Guiness 1970].
8. Voir en particulier le paragraphe VIII 1-8 dans [Cantor 1932, p. 411-418].

Les résultats nouveaux auxquels parvient Cantor sur les nombres transfinis de la deuxième classe sont exposés ultérieurement à Goldscheider[9] au cours de discussions fructueuses, où le jeune berlinois ne se montre pas inactif. Cette élaboration conduira Cantor à la rédaction d'un nouveau mémoire, publié en 1895-1897 dans les *Mathematische Annalen* : les « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre » (« Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis »)[10]. Ce mémoire, traduit en italien en 1895, en français en 1899, et en anglais en 1915, va consolider le rayonnement international de Cantor.

Avec la lettre ci-dessous, nous sommes donc au cœur d'un processus d'exploration et de recherche, dont les premières expressions sont liées à une correspondance. Cette méthode est privilégiée par Cantor, depuis l'élaboration de la théorie des ensembles effectuée au cours d'un échange épistolaire avec son ami, le mathématicien Richard Dedekind, ainsi que l'a montré l'ouvrage de Jean Cavaillès[11].

2 Traduction

Halle le 18 juin 1886

À Monsieur F. Goldscheider, Berlin

I- Étant donné un ensemble (*Menge*) M déterminé, composé d'objets concrets ou de notions abstraites, que nous appelons éléments, si l'on fait abstraction aussi bien de la nature des éléments que de l'ordre dans lequel ils sont donnés, on obtient une notion générale bien déterminée que j'appelle la *puissance* (*Mächtigkeit*) de M ou le *nombre cardinal* (*Cardinalzahl*) associé à l'ensemble M.

II- Deux ensembles donnés M et M_1 sont dits équivalents, et notés $M \sim M_1$, s'il est possible de les mettre en correspondance mutuelle, élément par élément, selon une loi injective

9. Plusieurs lettres de Cantor au mathématicien italien Giulio Vivanti évoquent aussi ses recherches concernant la deuxième classe de nombres transfinis [Cantor 1991, p. 300-305].
10. [Cantor 1895-1897], traduction française [Cantor 1899a ou 1899b].
11. [Cavaillès 1962].

et surjective ainsi que sa réciproque (nach einem Gesetz gegenseitig eindeutig und vollständig). Si $M \sim M_1$ et $M_1 \sim M_2$, on a aussi $M \sim M_2$.

Exemples :

1. L'ensemble des couleurs de l'arc en ciel est $\sim$ à l'ensemble des notes d'un octave.
2. L'ensemble des doigts de mes deux mains est $\sim$ à l'ensemble :

a,

b, c

d, e, f

g, h, i, k

3. L'ensemble (γ) de tous les nombres réels entiers positifs est $\sim$ à l'ensemble de tous les entiers complexes $(\nu + \mu i)$, $\sim$ à l'ensemble de tous les nombres réels rationnels (ν /μ), $\sim$ à l'ensemble de tous les nombres *algébriques* réels ou complexes [*Journal de Crelle*, vol 77, p. 258] [12].

4. L'ensemble de tous les points d'une droite AB est $\sim$ à l'ensemble de tous les points d'une autre droite, $\sim$ à l'ensemble des points d'une courbe régulière quelconque, mais aussi $\sim$ à l'ensemble de tous les points d'une surface, d'un volume etc. [*Journal de Crelle*, vol 84, p. 242] [13].

III- De I et II on conclut que des ensembles équivalents ont toujours *la même puissance*, et aussi que, réciproquement, des ensembles qui ont *le même nombre cardinal* sont équivalents.

IV- Si deux ensembles M et N sont réunis [14] en un ensemble S, et si deux ensembles M_1 et N_1respectivement équivalents aux deux premiers sont réunis en un ensemble S_1, on a également $S \sim S_1$. Si l'on désigne par a la puissance des ensembles M et M_1, par a' celle des ensembles N et N_1, et par b celle des ensembles S et S_1, on exprime la relation entre a, a' et b par la formule :

$$a + a' = b$$

Ceci constitue la définition de la somme de deux puissances ou de deux nombres cardinaux.

12. [Cantor 1874].
13. [Cantor 1878].
14. Cette réunion de deux ensembles M et N suppose, chez Cantor, des ensembles disjoints. Elle est notée $M + N$.

On se convainc aisément que l'on a toujours

$a + a' = a' + a$

$a + (a' + a'') = (a + a') + a''$

c'est-à-dire que les lois de commutativité et d'associativité sont valables pour l'addition de x nombres cardinaux.

V- Si l'on a un ensemble N de puissance a', et si l'on remplace chacun de ses éléments par un ensemble de puissance a, on obtient un nouvel ensemble P dont la puissance est désignée par c. On appelle alors c le produit du multiplicande a par le multiplicateur a', soit :

$$a \ . \ a' \ = c$$

On démontre que l'on a toujours

$a \ . \ a' = a' \ . \ a$

$a \ .(a' \ . \ a'') = (a \ . \ a') \ . \ a''$

Les lois de commutativité et d'associativité sont ainsi également valables pour la multiplication des puissances.

VI- Ces lois fondamentales s'appliquent aussi bien aux ensembles finis qu'aux ensembles infinis actuels, et à leurs puissances ou nombres cardinaux. Pour les nombres cardinaux finis, on voit facilement que dans l'égalité

$$a + a' = b$$

b n'est jamais égal à l'un des termes a ou a' de la somme.

Mais, en ce qui concerne les nombres infinis actuels, on se convainc que la dernière proposition n'est pas valable.

Pour tout nombre cardinal infini actuel a, on a ainsi par exemple

$1 + a = a$

$a + a = a.2 = a$

$a \ . \ a = a$ *etc.*

Il ne faut y voir aucune contradiction, si l'on se réfère aux définitions de I et II [15]. D'une

15. La démonstration de ces propriétés nullement évidentes fait intervenir la notion d'équivalence entre les ensembles. Pour les deux premières classes de nombres, elle est effectuée dans le mémoire « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre », publié entre 1895 et 1897 dans les *Mathematische Annalen* [Cantor

manière générale, pourquoi un ensemble M ne devrait-il pas être soumis au même concept général, à savoir celui de puissance, qu'un ensemble agrandi $M + N$?

C'est seulement l'habitude des ensembles finis qui est responsable du fait que, au début, on croit voir des difficultés dans ce résultat. Pourtant il en est ici comme, par exemple, du concept général d'« homme », qui convient à ma personne en cet instant tout aussi bien qu'il y a 40 ans, bien qu'en moi-même j'aie depuis lors beaucoup grandi et bien changé.

VII- Je vous familiarise maintenant avec la notion générale d'ensemble bien ordonné [16], telle qu'elle est définie en page 4 des « Grundlagen » (càd dans la 5è partie du Mémoire « Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten » des *Mathematische Annalen*, volume 21, p. 548) [17].

Des exemples :

1. (a, b, c, d, e, f, g, h, i, k) est un ensemble bien ordonné au contraire de :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a, & & & \\ & & b, & & c & & \\ & d, & & e, & & f & \\ g, & & h, & & i, & & k \end{array}$$

Les deux ensembles sont composés des mêmes éléments, et ont aussi la même puissance.

2. La suite des nombres cardinaux finis rangés selon l'ordre naturel :

$$(1, 2, 3, \ldots.., n, \ldots\ldots\ldots)$$

3. L'ensemble de tous les nombres rationnels positifs rangés dans l'ordre suivant :

1895-1897], que l'on peut lire dans sa traduction française par Francisque Marotte : *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis* [Cantor 1899a ou1899b].

16. Un ensemble E ordonné est dit *bien ordonné* [Cantor 1899b, p. 45-47] lorsque les deux conditions sont satisfaites :

1- il y a dans E un élément minimal ou de rang le plus bas

2- si F est une partie (non vide) de E, majorée dans E, F admet un plus petit majorant.

Il en résulte immédiatement :

3- toute partie F (non vide) de E admet un élément minimal.

17. [Cantor 1883a]. Ce mémoire connaît également une édition sous la forme [Cantor 1883b] et une réédition dans les œuvres complètes de Cantor [Cantor 1932, p. 165-209]. Une traduction en langue française est donnée dans [Cantor 1883c] ; mais celle-ci est amputée des considérations historiques et des paragraphes philosophiques de la version allemande.

(1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, 1/5, 5/1, 1/6, 2/5, 3/4, 4/3, 5/2, 6/1, ...)

La loi de rangement est la suivante : deux nombres rationnels $m\ /\ n$ et $m'/\ n'$étant donnés sous forme *irréductible*, le premier d'entre eux occupe un *rang inférieur* ou *supérieur* à l'autre selon que $m+n$ est plus petit ou plus grand que $m'+n'$; mais si $m+n=m'+n'$, la caractéristique du rang est réglée par la grandeur de m et m'.

Pour cet ordre-là, toute partie non vide admet un premier élément. Pour la relation d'ordre usuelle ($a < b$), cela n'est pas valable : l'ensemble des nombres rationnels de la forme $1/n$ n'a pas de plus petit élément.

4. (1, 3, 5, 7, 9, ... 2, 4, 6, 8, 10, ...)

Ici tous les nombres cardinaux finis sont envisagés de la manière suivante : tout d'abord les nombres cardinaux impairs apparaissent dans leur ordre naturel, puis à leur suite viennent les pairs dans leur ordre naturel.

5. (3, 5, 7, 9, 11, ... 2, 4, 6, 8, 10, ... 1)

Voilà à nouveau l'ensemble de tous les nombres cardinaux finis sous la forme d'ensemble bien ordonné, mais où l'élément 1 occupe le rang le plus élevé.

6. Prenons un système d'éléments munis de deux indices finis illimités :

$$a_{m,n}$$

et considérons la loi de rangement suivante : deux éléments $a_{m,n}$ et $a_{m',n'}$ étant donnés, le premier occupe un rang inférieur ou supérieur au deuxième selon que m est plus petit ou plus grand que m' ; mais si $m=m'$, la relation d'ordre est déterminée par la grandeur de n et n' ; ainsi on obtient l'ensemble *bien ordonné* suivant :

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots\ldots, a_{1,n}, \ldots\ldots\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots\ldots, a_{2,n},\ \ldots\ldots\ a_{3,1}, a_{3,2}, \ldots\ldots, a_{3,n}, \ldots\ldots$$
$$a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots\ldots, a_{m,n}, \ldots\ldots a_{m+1,1}, a_{m+1,2}, \ldots\ldots, a_{m+1,n}, \ldots\ldots\ldots)$$

VIII- Si l'on fait abstraction de la nature des éléments d'un ensemble M *bien ordonné*, mais *non* de l'ordre qui les affecte, il s'en suit un concept général précis que j'ai désigné dans les « Grundlagen » sous le terme de « nombre (*Anzahl*) de l'ensemble bien ordonné M », mais que je préfère maintenant appeler « le *nombre ordinal* (*Ordnungszahl*) associé à l'ensemble bien ordonné M », ou encore la « *forme* ou le *type* de l'ensemble bien ordonné M ».

IX- J'appelle deux ensembles bien ordonnés M et M_1 « semblables » ou « conformes » entre eux, et je note M *cf* M_1, s'ils se correspondent mutuellement (sont image l'un de l'autre) élément par élément de manière bijective, de telle sorte que l'ordre de *deux* éléments quelconques de M soit le même que l'ordre des deux éléments *correspondants* de M_1. Cette correspondance n'est en général possible, si du moins elle l'est, que *d'une seule manière*, tandis que la correspondance employée pour l'équivalence d'ensembles, telle qu'elle est définie au II, peut se produire de *plusieurs façons*, lorsque tout du moins elle est possible.

Deux ensembles *conformes* bien ordonnés sont aussi *eo ipso* équivalents, et donc de même puissance.

Si l'on a M *cf* M_1 et M_1 *cf* M_2, alors on a aussi : M *cf* M_2.

Exemples :

1. Les ensembles bien ordonnés $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, k)$ et $(a', b', c', d', e', f', g', h', i', k')$sont conformes ; dans leur application, a est lié à a', b à b', $\ldots$ k à k'.
2. Les ensembles bien ordonnés introduits en VII 2 et VII 3 sont conformes [18].
3. Les deux ensembles bien ordonnés :

$(1, 3, 5, 7, \ldots.., 2, 4, 6, 8, \ldots..)$ et $(a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots.., a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots..)$

sont conformes par la correspondance dans laquelle 1 doit être lié à a_2 , 3 à a_4 , 5 à a_6 ... etc., 2 à a_1 , 4 à a_3 , 6 à a_5 ... etc. Toute autre bijection entre les deux ensembles (comme par exemple celle qui associe de manière générale à l'entier n du premier l'élément a_n du second)

18. Cantor montre que l'ensemble A des fractions irréductibles est dénombrable, bien ordonné et conforme à l'ensemble usuel N des entiers naturels dans [Cantor 1874]. Ce résultat apparaît en effet comme un cas particulier du théorème général selon lequel il existe une bijection entre l'ensemble des nombres algébriques réels et l'ensemble N.

L'auteur revient sur la dénombrabilité de l'ensemble A des fractions irréductibles de l'intervalle [0, 1] au paragraphe 4 de [Cantor 1878] (voir [Cantor 1932, p. 126]). La relation d'ordre adoptée sur A revient alors à :

(p / q) < (p' / q') si et seulement si : ou bien p+q < p'+q' ; ou bien p+q = p'+q' et p < p'.

C'est l'ordre que choisit Cantor dans l'exemple VII3 de la présente lettre. On retrouve ainsi le fait que l'ensemble A est dénombrable, bien ordonné et conforme à N muni de l'ordre usuel.

ne remplit pas la condition selon laquelle la *relation d'ordre* de *deux éléments quelconques* du premier ensemble est la même que celle des éléments correspondants du second.

4. Les deux ensembles bien ordonnés :

$$(1, 2, 3, \ldots.., n, \ldots\ldots..) \text{ et } \quad (2, 3, 4, \ldots.., n+1, \ldots..)$$

sont conformes, le deuxième étant une partie du premier ; par contre ces deux ensembles ne sont pas conformes à l'ensemble bien ordonné :

$$(2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots..,\ 1)$$

bien que ce dernier ensemble soit exactement composé des mêmes nombres que le premier des trois.

Le dernier de ces ensembles bien ordonnés a, pour la relation d'ordre, un plus grand élément, le « dernier », à savoir 1 ; les deux premiers ensembles n'ont pas de « dernier » terme.

X- De VIII et IX résulte le fait que des ensembles bien ordonnés conformes ont le même nombre ordinal, la même forme ou le même type, et aussi que réciproquement des ensembles bien ordonnés de même nombre ordinal sont conformes.

Aux ensembles bien ordonnés

$$(1, 2, 3, \ldots.., n, \ldots\ldots..) \ \textit{et} \quad (2, 3, 4, \ldots.., n+1, \ldots..)$$

revient d'après cela le même nombre ordinal, bien que le deuxième soit une partie seulement du premier ; par contre les deux ensembles bien ordonnés

$$(1,\ 2,\ 3,\ \ldots..,\ n,\ \ldots\ldots..) \qquad (2,\ 3,\ 4,\ \ldots..,\ n+1,\ \ldots..,\ 1)$$

ont des nombres ordinaux ou des types différents, bien qu'ils soient constitués des mêmes éléments.

XI- Je désigne par ω le type ou le nombre ordinal de l'ensemble bien ordonné

$$(1, 2, 3, \ldots.., n, \ldots\ldots..)$$

XII- Soit M et N deux ensembles bien ordonnés, de types α et α', réunis en un nouvel ensemble bien ordonné S, de telle sorte que les éléments de chacun d'entre eux conservent mutuellement leur rang, tandis que la totalité des éléments de M occupe un rang inférieur à la totalité des éléments de N. Ainsi le nombre ordinal β de S est appelé la somme des nombres ordinaux α et α' de M et de N :

$$\alpha + \alpha' = \ \beta$$

On appelle ici α l'*augendus* et α' l'*addendus*.

En général $\alpha + \alpha'$ et $\alpha' + \alpha$ sont différents. Dans le cas où α et α' sont tous deux *finis*, on a $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha$.

Par contre on a toujours $\alpha + (\alpha' + \alpha'') = (\alpha + \alpha') + \alpha''$. Alors que la loi de *commutativité* cesse en général avec l'addition des *nombres ordinaux*, la loi d'*associativité* demeure encore valable pour ceux-ci.

Exemples :

1. $1 + \omega = \omega$; par contre $\omega + 1$ est différent de ω.

2. Les deux ensembles bien ordonnés qui se trouvent en VII 2 et VII 3 admettent tous deux pour nombre ordinal ω.

3. L'ensemble bien ordonné M qui se trouve en VII 4 admet pour nombre ordinal $\omega + \omega$; celui qui est introduit en VII 5 a pour nombre ordinal $\omega + \omega + 1$.

XIII- Si l'on a un ensemble bien ordonné N de type α', et si l'on remplace *chacun* de ses élément par *un* ensemble bien ordonné de type α, il en résulte un nouvel ensemble bien ordonné P, dont le type γ est appelé le produit $\alpha \,.\alpha'$ du *multiplicande* α et du *multiplicateur* α'.

$$\alpha \,.\, \alpha' = \gamma$$

Dans les « Grundlagen », le *multiplicateur* a été écrit en premier, suivi du *multiplicande*, alors que l'écriture contraire est préférable.

Là aussi en général $\alpha \,.\, \alpha'$ est différent de $\alpha' .\, \alpha$; si α et α' sont des nombres ordinaux finis, on a $\alpha \,.\, \alpha' = \alpha' .\, \alpha$. Par contre on a toujours

$$\alpha \,.(\alpha' .\, \alpha'') = (\alpha \,.\, \alpha') \,.\alpha''$$

Par exemple si $\alpha = \omega$, $\alpha' = 2$:

N est de la forme (a, b). À la place de a, on met $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots..)$ de type ω , à la place de b, on met $(b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n, \ldots...)$ de type ω, et on obtient l'ensemble bien ordonné P :

$(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots...b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n, \ldots\ldots)$

dont le type est $\omega.2$.

Mais si l'on prend $\alpha = 2$, $\alpha' = \omega$, l'ensemble N est de la forme $(r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n, \ldots..)$ et, à la place de r_n on met l'ensemble bien ordonné (p_n, q_n) de type 2, et l'on obtient P :

$$(p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_n, q_n, ...)$$

de type $2.\omega$.

Mais le dernier ensemble est de type ω, ainsi on conclut que

$$2.\omega = \omega$$

Les nombres $\omega + \omega$ et $\omega + \omega + 1$, rencontrés en XII 3, peuvent maintenant s'écrire $\omega .2$ et $\omega.2 + 1$.

À l'exemple d'ensemble bien ordonné donné en VII 6 revient maintenant de toute évidence le nombre ordinal

$$\omega \;.\; \omega = \omega$$

XIV- La *puissance* de l'ensemble de tous les nombres [entiers] *finis* est la *plus petite* des puissances, de même que ω est le *plus petit* nombre ordinal transfini ; j'appelle cette puissance la *première* puissance transfinie ou plus simplement la *première* puissance et je la désigne par :

$$\omega^*,$$

de même que l'on désigne, d'une manière générale, par α^* la puissance attribuée à un ensemble bien ordonné de type α. On a alors manifestement :

$$(\omega + 1)^* = (\omega + 2)^* = ... = \omega^*$$

ou encore :

$$(\omega.2)^* = (\omega.2 + 1)^* = (\omega.2 + 2)^* = ... = \omega^*$$

$$\left(\omega^2\right)^* = \omega^*.$$

Il apparaît ainsi que, dans la formation des nombres ordinaux

$$\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2, ..., \omega.2,\ \omega.2 + 1, ...$$

les puissances correspondantes demeurent avant tout les mêmes.

XV- La collection (*Inbegriff*) de *tous* les nombres ordinaux, qui sont des types d'ensembles bien ordonnés de puissance ω^*, je l'appelle la *deuxième classe de nombres* :

$$\omega, \omega + 1, ..., \omega^n m_0 + \omega^{n-1} m_1 + ... + \omega m_{n-1} + m_n, ..., \omega^\omega, ..., \omega^{\omega^\omega}, ...$$

Dans son ordre naturel la deuxième classe de nombres forme elle-même un ensemble bien ordonné, dont j'appelle le type Ω ; Ω est le *plus petit* nombre de la troisième classe. Cependant la puissance Ω^* de la deuxième classe de nombres n'est pas à nouveau égale à ω^*, mais, comme je l'ai prouvé dans le § 13 des « Grundlagen » [19], c'est la puissance *immédiatement supérieure* à ω^*.

XVI- Alors que les nombres ordinaux *finis* suivent les mêmes lois que les nombres cardinaux *finis* (c'est la raison pour laquelle leur distinction n'est pas apparue de façon très nette dans la théorie des nombres jusqu'à présent), la différence entre *les cardinaux transfinis et les ordinaux transfinis* s'exprime de manière la plus décisive et la plus claire.

Georg Cantor

BIBLIOGRAPHIE

ŒUVRES DE CANTOR

[1874] Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 77 (1874), p. 258-262 ; in [Cantor 1932, p. 115-118]. Traduction française : « Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels », Acta Mathematica, 2 (1883), p. 305-310.

[1878] Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84 (1878), p. 242-258 ; in [Cantor 1932, p. 119-133]. Traduction française : «Une contribution à la théorie des ensembles », Acta Mathematica, 2 (1883), p. 311-328.

[1883a] Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Part V, Mathematische Annalen, 21 (1883), p. 545-591 ; in [Cantor 1932, p. 165-209]. Traduction française : [Cantor 1883c].

[1883b] Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen, Leipzig : B. Teubner, 1883.

19. [Cantor 1883a] ou [Cantor 1883b].

[1883c] Fondements d'une théorie générale des ensembles, Acta Mathematica, 2 (1883), p. 381-408.

[1887-1888] Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 91 (1887), p. 81-125 et 252-270 ; 92 (1888), p. 240-265 ; in [Cantor 1932, p. 378-439].

[1895-1897] Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Mathematische Annalen, Partie I, 46 (1895), p. 481-512 ; Partie II, 49 (1897), p. 207-246 ; in [Cantor 1932, p. 282-356]. Traduction française : [Cantor 1899a ou 1899b].

[1899a] Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, traduction F. Marotte, Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, 5e série, tome 3 (1899), p. 343-437 ; édité sous forme de brochure [Cantor1899b].

[1899b] Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, traduction F. Marotte, Paris : Hermann, 1899.

[1932] Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, mit erläutern den Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind, herausgegeben von Ernst Zermelo und Adolf Fraenkel, Berlin : Springer, 1932.

[1991] Georg Cantor Briefe, voir [Meschkowski, Nilson 1991].

AUTRES OUVRAGES

CAVAILLÈS Jean

[1962] Philosophie mathématique, Paris : Hermann, 1962.

DÉCAILLOT Anne-Marie

[2008] Cantor et la France. Correspondance du mathématicien allemand avec les Français à la fin du XIXè siècle, Paris : Kimé, à paraître en 2008.

DUGAC Pierre

[1976] Des correspondances mathématiques des XIXe et XXe siècles, Revue de Synthèse, 97 (1976), n. 81-82, p. 149-170.

GRATTAN-GUINESS Ivor

[1970] An Unpublished Paper by Georg Cantor : « Principien einer Theorie der Ordnungstypen - Erste Mittheilung », Acta Mathematica, 124 (1970), p. 65-107.

MESCHKOWSKI Herbert

[1961] Denkweisen grosser Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Braunschweig : Vieweg, 1961 ; 2è édition revue et enrichie 1990.

MESCHKOWSKI Herbert, NILSON Winfried (herausgegeben von)

[1991] Georg Cantor Briefe, Berlin, etc. : Springer, 1991.