Compter à Babylone

d'après l'article de Christine Proust
« Le calcul sexagésimal en Mésopotamie : enseignement dans les écoles de scribes »
disponible sur http://www.dma.ens.fr/culturemath/

Les mathématiciens mésopotamiens ont inventé il y a plus de 4000 ans une numération, dont on trouve encore la trace aujourd'hui dans la mesure des angles et des durées. Pour comprendre le calcul babylonien, la meilleure méthode est de suivre le programme et les méthodes d'enseignement des mathématiques dans les écoles de scribes de Mésopotamie.
Les écoliers écrivent sur des tablettes d'argile, en utilisant des poinçons. A vos tablettes !

L'écriture des nombres

Pour noter les nombres, les Mésopotamiens utilisaient 59 « chiffres » !

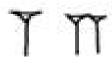
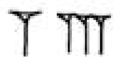
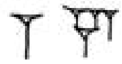
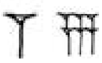
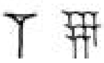
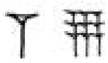
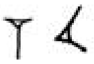
Ces « chiffres » étaient obtenus en répétant les deux symboles 𒁹 (1) et 𒌋 (10) autant que nécessaire.

Saurez-vous compléter le tableau des 59 « chiffres » de l'écriture mésopotamienne ?

1	𒁹	2	𒈫	3	𒐈	4	𒐉	5	𒐊
6	𒐋	7	𒐌	8	𒐍	9	𒐎	10	𒌋
11	𒌋 𒁹	12	𒌋 𒈫	13	𒌋 𒐈	14	𒌋 𒐉	15	𒌋 𒐊
16	𒌋 𒐋	17	𒌋 𒐌	18	𒌋 𒐍	19	𒌋 𒐎	20	𒎙
21		22		23		24		25	
26		27		28	𒎙 𒐍	29		30	𒌍
31		32		33		34		35	
36	𒌍 𒐋	37		38		39		40	𒐏
41		42	𒐏 𒈫	43		44		45	
46		47		48		49		50	𒐐
51		52		53	𒐐 𒐈	54		55	
56		57		58		59	𒐐 𒐎		

Anne-Marie Aebischer Département de Mathématiques UFRST /IREM de Besançon

Pour représenter les nombres supérieurs à 60, la numération obéit à un principe de position à base 60 : une soixantaine s'écrit 1 (en deuxième position).

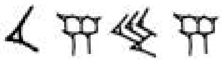
60		61		62		63		64	
65		66		67		68		69	
70		71		72		73		74	

85	

(85=1x 60+ 25) L'écriture juxtapose donc les chiffres 1 et 25 (nous le noterons aussi 85=1.25)

113	

(113=1x 60+ 53) L'écriture juxtapose donc les chiffres 1 et 53 (1.53)

945	

(945=15x 60+ 45) L'écriture juxtapose donc les chiffres 15 et 45 (15.45)

Saurez vous écrire les nombres suivants 192 87 359 ?[1]

Quel es le nombre le plus grand nombre qu'on puisse écrire en juxtaposant deux chiffres : c'est le nombre obtenu en juxtaposant les chiffres 59 et 59, soit le nombre

59x60+59 = 3599 qui s'écrit  ce que nous pourrions noter 59.59

Pour représenter des nombres supérieurs à 3600=60 x 60, il faut introduire des chiffres supplémentaires.

3758=1x 3600+ 2 x60+38 se représentera:  en juxtaposant les chiffres 1, 2 et 38 (1.2.38)

Comment lire le nombre  ?

Avec notre notation, il s'écrit 52.25.33, il s'agit donc du nombre
52 x 3600+25 x 60+33 = 188733

La numération Babylonienne est donc sexagésimale (elle fait intervenir dans la décomposition d'un nombre les puissances de 60) et positionnelle.

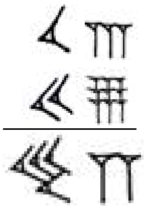
[1]

192		87		359	

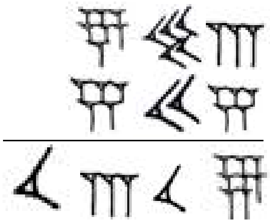
Les opérations

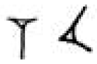
Voici quelques exemples d'addition.

Pouvez-vous traduire et vérifier ces additions ?[2]



regroupement de 10  en 1  supplémentaire

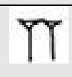
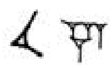
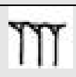
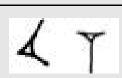
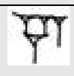
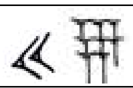
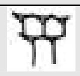
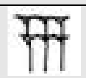
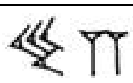
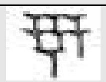
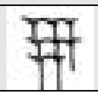
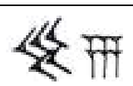


regroupement des 7  en , cela porte à 13 le nombres de caractères  à gauche, ce qui s'écrit 

Et pour multiplier ?

La technique de multiplication est la base de l'entraînement au calcul. Les tables de multiplication représentent environ la moitié des textes mathématiques de niveau élémentaire . Les exercices scolaires retrouvés montrent que la multiplication opère exclusivement sur les nombres positionnels et qu'elle s'appuie sur les produits élémentaires donnés par les tables numériques et mémorisés.

Une table de multiplication, à compléter…. Au fait, laquelle ?[3]

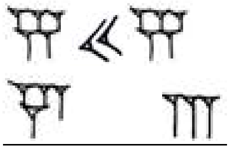
[2] 13+29=42 et (7x60+53)+ (5x60+25)=473+325=798= 13 x60+18

[3] Table de multiplication par 7

Une fois connues les tables de multiplication, nous pouvons nous lancer dans une multiplication plus conséquente : 325 x 243

Décomposons dans l'écriture sexagésimale : 325 = 5x60 + 25 et 243 = 4x60 + 3

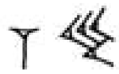
Nous allons donc multiplier les nombres 5.25 et 4.3.



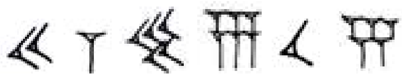
on décompose [4]

25x3 : 

5x3 

25x4 

5x4 



$325 \times 243 = (5\times60+25)\times(41\times60+3)=5\times4\times60^2+(25\times4+5\times3)\times60+25\times3$

Nous avons effectué les 4 produits : 5x4, 25x4, 5x3 et 25x3 (résultats d'après les tables mémorisées) . Cela permet d'obtenir le résultat final en veillant aux positions des résultats intermédiaires puisque :

$325 \times 243= 20\times60^2+115\times60 +75 = 21\times60^2+56\times60+15$ soit 21.56.15

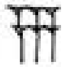
C'est bien le résultat trouvé.

[4] Dans cette disposition, nous avons tenu compte de l'ordre de grandeur en alignant verticalement les multiples de 60 et de 60^2

Les inverses

Il n'y a pas de signe écrit pour indiquer l'ordre de grandeur, comme nous le faisons en écrivant des zéros en position finale ou une virgule, nous permettant par exemple de distinguer une unité (1), une dizaine (10), un dixième (0,1). Le signe  peut désigner le nombre 1, ou 60, ou 1/60, ou toute puissance de 60 positive ou négative. Il en est de même pour tous les autres nombres :  peut désigner 2, ou 2×60, ou 2/60, etc.

Les nombres sont donc définis à un facteur près (égal à une puissance de 60, d'exposant positif ou négatif). La numération mésopotamienne savante est donc sexagésimale positionnelle relative.

Le produit de  et de  s'écrit . Le produit de  et de  s'écrit .

Mais alors, que signifie l'égalité de deux expressions numériques dont l'ordre de grandeur est indéterminé ? En toute rigueur, les écritures suivantes peuvent paraître abusives :

$$2 \times 30 = 1$$

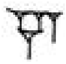
$$9 \times 20 = 3$$

Cependant, dans la mesure où le nombre 1 (ou le nombre 3), par exemple, est considéré non comme une quantité absolue, mais comme un ensemble de valeurs définies à facteur (une puissance 60) près, cette écriture est acceptable. Ici, le signe « = » signifie : « s'écrit comme ». Il serait sans doute préférable de remplacer le signe « = » par un signe de congruence.

Deux nombres forment donc une paire d'inverses si leur produit est 1 (ou toute autre puissance de 60, positive ou négative).

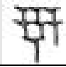
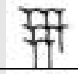
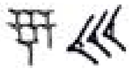
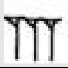
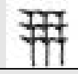
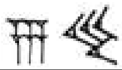
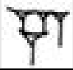
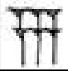
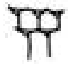
Exemples :

30 est l'inverse de 2 car $2 \times 30 = 1$ (on peut dire aussi : 1/2 heure représente 30 minutes ou 1/30 heure représente 2 minutes)

(15) est l'inverse de (4) car leur produit (60) s'écrit  (Soit « 4×15 = 1 »)

(450) est l'inverse de  (8) car leur produit (3600) s'écrit aussi .

Vérifiez que le tableau ci-dessous donne, lorsque c'est possible la liste des inverses des premiers entiers naturels :

			Pas d'inverse
			
			
			
			Pas d'inverse
			

Certains nombres n'ont pas d'inverse !

Précisons la définition d'un nombre inversible : un entier naturel *a* admet un inverse s'il existe un entier naturel b et un entier naturel *n* tel que $ab=60^n$. L'inverse de *a* est alors le plus petit entier *b* vérifiant cette propriété.

> Théorème : Les entiers naturels qui admettent un inverse sont ceux dont la décomposition en facteurs premiers ne comprend que les facteurs 2, 3 et 5.

La décomposition en facteur premier de 60 est : $60=2^2 \times 3 \times 5$.

Si *a* admet un facteur premier *p* différent de 2, 3 ou 5, *a* ne peut pas admettre d'inverse car on aurait alors *p* divise *ab*, donc *p* divise 60^n, ce qui est impossible puisque *p* n'est pas dans la liste des diviseurs premiers de 60.

Sinon, il existe des entiers naturels *i, j* et *k* tels que $a = 2^i \times 3^j \times 5^k$

$60^n= 2^{2n} \times 3^n \times 5^n$, pour pouvoir écrire $ab=60^n$, *n* doit vérifier $i \leq 2n$, $j \leq n$ et $k \leq n$.

Si *i* est pair, on choisit n=max (*i*/2, *j, k*), si *i* est impair, on choisit *n*=max ([i/2]+1,*j, k*)

([*i/2*] désigne la partie entière de *i/2)*

$$\text{Soit} \quad 60^n=a.\ 2^{2n-i} \times 3^{n-j} \times 5^{n-k}$$

Les exposants 2*n-i, n-j,n-k* sont des entiers naturels donc $b= 2^{2n-i}\times 3^{n-j}\times 5^{n-k}$ est bien un entier naturel tel que $ab=60^n$, donc a est inversible. De plus le choix de *n* assure que *b* est le plus petit entier vérifiant cette propriété, nous avons donc déterminé l'inverse de *a*.

Exemple : Déterminer l'inverse de 12000.

$12000=2^5 \times 3^3 \times 5$ $\qquad 60^3 = 2^6 \times 3^3 \times 5^3$ l'inverse de 12000 est donc $2 \times 5^3=16$

Diviser par un nombre c'est multiplier par son inverse. Les tables d'inverses jouent donc un rôle clé dans le calcul.

Pouvez-vous effectuer selon ces principes 340/48 ?