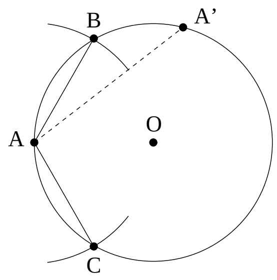
La corde de Bertrand

Voici un "paradoxe" célèbre de probabilités. Notre problème est ici de calculer la probabilité pour qu'une corde prise au hasard sur un cercle $\mathcal{C}$ donné ait une longueur supérieure au rayon R de ce cercle.

1 Première méthode : traçons 2 points

Pour construire une corde sur un cercle donné, quoi de plus naturel que de choisir d'abord une de ses extrémités, puis la deuxième. Mais alors, le choix de la première extrémité A importe peu : tous les choix sont équivalents, à rotation près.

Ensuite, la corde aura une longueur supérieure au rayon du cercle si l'autre extrémité est située dans un secteur angulaire bien déterminé, tel que celui de la figure suivante :



La corde aura ici une longueur supérieure au rayon du cercle si la deuxième extrémité A' est dans le secteur angulaire compris entre les points B et C (le secteur de droite, qui ne contient pas le point A, bien sûr).

Considérant la probabilité uniforme sur le cercle (c'est-à-dire que la probabilité de placer le point A' sur un arc de cercle donné est proportionnelle à la longueur de cet arc), la probabilité pour que la corde AA' soit plus longue que le rayon du cercle est donc le rapport de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ sur la longueur totale du cercle.

Soit R le rayon du cercle. La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ est proportionnelle à l'angle $\widehat{\mathrm{BOC}}$, plus exactement elle est égale à $\mathrm{R} \times \widehat{\mathrm{BOC}}$. Comme les triangles ABO et ACO sont équilatéraux, leurs angles sont de $\dfrac{\pi}{3}$, et donc l'angle $\widehat{\mathrm{BOC}}$ est égal à $\dfrac{4\pi}{3}$. On obtient une probabilité :

$$p_1 = \frac{\frac{4\pi}{3}\mathrm{R}}{2\pi\mathrm{R}}$$

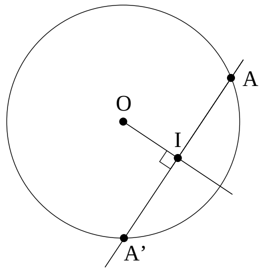
soit
$$\boxed{p_1 = \frac{2}{3}}$$

2 D'autres résultats !

2.1 La corde par son milieu

Une deuxième façon de calculer la probabilité cherchée est de considérer cette fois le milieu I de la corde. En effet, toute corde (AA') est perpendiculaire à la droite (OI) qui joint le centre du cercle au milieu I du segment $[\mathrm{AA}']$. Et ce, car les points A et A' sont sur le cercle, donc équidistants du centre O, qui est donc sur la médiatrice du segment $[\mathrm{AA}']$.

Autrement dit, le milieu I détermine notre corde : celle-ci est obtenue en traçant la perpendiculaire en I à la droite (OI).



Mais alors, la condition sur I pour que la corde ait la longueur voulue n'est plus la même : pour que la longueur de la corde soit supérieure à celle du rayon, il faut que le point I soit suffisament proche du centre O du cercle.

En effet, plus le point I est choisi loin de O, plus la corde est courte. Elle a la même longueur que le rayon R lorsque la distance OI est $\mathrm{R}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C'est le théorème de Pythagore dans le triangle OIA rectangle en I, le segment [OI] étant la médiane du triangle OAA' alors équilatéral).

Là encore, il est naturel de considérer la probabilité uniforme sur le disque : si l'on place le point I au hasard, la probabilité de le placer dans une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Mais alors, la zone correspondant à la condition $\mathrm{OI} \leq \mathrm{R}\frac{\sqrt{3}}{2}$ est un disque de surface $\pi\left(\mathrm{R}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. La probabilité pour que la corde soit plus longue que le rayon est donc :

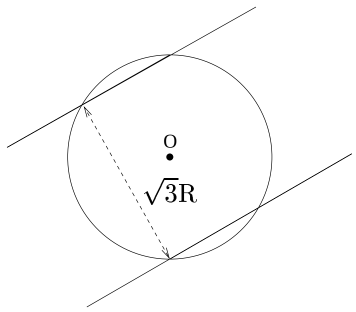
$$p_2 = \frac{\pi\left(\mathrm{R}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\pi \mathrm{R}^2}$$

soit
$$\boxed{p_2 = \frac{3}{4}}$$

2.2 Et encore d'autres résultats...

Tracer une corde sur notre cercle, ce n'est ni plus ni moins que choisir une droite D du plan qui intersecte le cercle $\mathcal{C}$. Une fois choisie la direction de la droite, qui importe peu puisque manifestement le problème est invariant par rotation, il s'agit de choisir la position de la droite. On élimine bien sûr les positions pour lesquelle la droite D ne coupe pas le cercle $\mathcal{C}$.

La corde correspondante aura alors une longueur supérieure à celle du rayon R du cercle si et seulement si la droite se trouve dans une bande délimitée par deux droites, qui correspondent au cas limite où la corde est de longueur R, droites représentées sur le dessin suivant :



Mais alors, la bande est de largeur $\sqrt{3}\mathrm{R}$, sur une largeur totale (la bande correspondant à toutes les droites d'une direction donnée intersectant le cercle) de 2R. La probabilité pour que la corde tracée soit de longueur au moins R est donc, dans ce modèle-ci :

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}\mathrm{R}}{2\mathrm{R}} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

3 Pourquoi ces différences ?

3.1 Introduction à la théorie de la mesure

Nous venons de voir trois résultats différents au problème de départ. Quelque chose ne va pas là-dedans... En fait, ce problème est intimement lié à la notion de mesure. Que signifie en effet : "prendre une corde au hasard" ?

Dans le cadre de problèmes plus simples, il y a souvent une façon canonique de "prendre un objet au hasard". Ainsi, si l'on doit prendre "au hasard" un entier entre 1 et 10, on sous-entend que tous les tirages possibles sont équiprobables, et donc qu'il y a une chance sur dix de tirer 1, une chance sur dix de tirer 2, etc.

Sur l'univers, ici $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$, on a ainsi défini une mesure de probabilité μ, c'est-à-dire une fonction définie sur certaines parties de Ω (ici toutes) et à valeurs dans l'intervalle $[\,0\,;1\,]$, et qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall \mathrm{A}, \quad 0 \leq \mu(\mathrm{A}) \leq 1; \\ \mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = 1; \\ \forall \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \text{ disjoints}, \quad \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\mathrm{A}_k) \end{cases}$$

N.B. Précisons rapidement cette notion de *certains ensembles*. Dans le cas précis de l'univers fini $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$, il s'agit de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω. Dans un cadre plus général, une mesure (de probabilités) est définie sur une σ-algèbre, c'est-à-dire une sous partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \Omega \in \mathcal{F}; \\ \forall \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathrm{A}^c \in \mathcal{F}; \\ (\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_k \in \mathcal{F}) \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Exemple Pour l'ensemble $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$, la σ-algèbre considérée est l'ensemble des parties de de Ω. La mesure de probabilité naturelle (qui correspond à l'équiprobabilité de toutes les valeurs) est définie par sa valeur $1/10$ sur chaque singleton. Sa valeur sur les parties à plusieurs éléments est alors déterminée par la règle $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathrm{A}_k)$, lorsque les ensembles A_k sont deux à deux disjoints. Il suffit alors de prendre pour les A_k les singletons correspondant aux éléments de la partie considérée (ces singletons étant en nombre fini, on complète la suite $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant $\mathrm{A}_k = \emptyset$ à partir d'un certain rang).

N.B. Tout ceci est un peu rapide. La théorie de la mesure est un domaine important des mathématiques modernes. On trouvera une introduction bien expliquée et détaillée dans [1] ou, plus sobre et rigoureuse, dans [2].

3.2 Trouvons une mesure de probabilité ?

Pour ce qui est de prendre un entier naturel au hasard, c'est plus compliqué : il n'y a pas de loi uniforme sur $\mathbb{N}$. En effet, si tous les entiers étaient équiprobables, si l'on note p la probabilité de tirer 1 (ou 2, ou 3, etc), alors on doit avoir une relation du type $\sum_{n\in\mathbb{N}} p = 1$ (la somme des probabilités doit faire 1).

Mais bien sûr, aucun nombre p ne vérifie cette condition. Il y a heureusement de multiples façons qui marchent de tirer un nombre entier "au hasard", c'est-à-dire de multiples mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$. Ainsi, toute série convergente à termes positifs, et de somme 1, définit une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$.

Exemple : La série $\sum_{n\geq 1} 2^{-n}$ est convergente, de somme 1. Elle définit une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{N}^*$ (ou sur $\mathbb{N}$ par décalage), en posant, pour toute partie A de $\mathbb{N}^*$: $\mu(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathrm{A}} 2^{-n}$. Mais, pour cette mesure de probabilité, tous les entiers ne sont pas équiprobables. On a par exemple une chance sur deux de tirer le nombre 1, tandis qu'on a seulement une chance sur $2^{10} = 1024$ de tirer le nombre 10…

Tout ce qui précède se situe dans le cadre des probabilités discrètes. Passons donc au continu (le problème de la corde est manifestement un problème continu). Pour ce qui est de choisir un nombre au hasard entre 0 et 1, pas trop de difficultés. Bien sûr, l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ est infini et même non dénombrable, il est donc impossible de définir une loi de probabilité point par point.

En revanche, une façon naturelle de décrire la façon la plus courante de prendre un nombre X "au hasard" dans l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ est de dire que, quel que soit l'intervalle $[a\,;b] \subset [0\,;1]$, la probabilité pour que le nombre X soit dans $[a\,;b]$ est égale à la longueur $b-a$ de l'intervalle. (Si l'on tire un nombre au hasard sur un intervalle autre que $[0\,;1]$, il faut le cas échéant diviser toutes ces probabilités par la longueur totale de l'intervalle.)

Ceci correspond à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0\,;1]$. C'est la mesure la plus intuitive, mais on peut en définir bien d'autres. Par exemple, si f est une fonction positive intégrable sur $[0\,;1]$, et vérifiant $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, alors on peut définir une mesure μ_f sur $[0\,;1]$ par :

$$\mu_f(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout borélien A.

On peut également "mélanger" les mesures. Par exemple, on peut dire que l'on tirera le réel $1/2$ avec la probabilité $1/2$, et que sinon, avec une probabilité $1/2$ également, on tire un réel au hasard dans l'intervalle $[0\,;1]$ selon la mesure de Lebesgue (divisée par deux, pour que le total des probabilités soit encore 1).

3.3 Nos différentes méthodes

Il est temps désormais d'examiner les différentes méthodes que nous avons utilisées pour résoudre le problème de la corde.

Pour la première, nous avons dit que la corde était déterminée par deux points du cercle, le problème étant invariant par rotation. La mesure de probabilité utilisée est alors la mesure uniforme sur le cercle, c'est-à-dire que l'on considère que, quel que soit l'arc de cercle considéré, la probabilité pour que le deuxième point construit soit sur cet arc est proportionnelle à la longueur de l'arc (pour avoir une probabilité totale de 1, c'est donc $\frac{1}{2\pi\mathrm{R}}$ fois la longueur de l'arc).
La probabilité cherchée étant celle pour que la corde soit de longueur supérieure ou égale à celle du rayon, nous avons donné comme réponse la mesure de l'ensemble constitué par les cas favorables, c'est-à-dire la valeur de notre mesure de probabilité sur un arc de longueur $\mathrm{R}\frac{4\pi}{3}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$.

Pour ce qui est de la deuxième méthode présentée, la mesure de probabilité sous-jacente est la mesure uniforme sur un disque : la probabilité pour que le point choisi (selon cette loi de probabilité) soit dans une zone donnée étant supposée proportionnelle à l'aire de cette zone (plus exactement, $\frac{1}{\pi\mathrm{R}^2}$ fois cette aire). Or, cette mesure n'a *a priori* rien à voir avec la précédente, et pourtant elle est tout aussi légitime...

Pour la troisième méthode enfin, la mesure de probabilité est la mesure uniforme sur un segment (la direction fixée, la droite est déterminée par son point d'intersection avec le diamètre perpendiculaire à cette direction). Encore une fois, cette mesure n'a rien à voir avec les précédentes.

Conclusion : Quelle est donc la réponse "juste" à notre problème de départ ? Aucune de celles-ci, ou plutôt toutes, selon le goût de chacun ! Voire d'autres méthodes encore, on peut très bien en imaginer. Ce problème est connu sous le nom de “paradoxe de la corde de Bertrand”. Mais est-ce réellement un paradoxe, au sens classique où l'on entend le mot en mathématiques ? Bien sûr que non : le problème est tout simplement mal posé, pour y répondre il faut que l'on précise selon quelles modalités on “prend une corde au hasard”...

Références

[1] P. Billingsley, *Probability and measure*, John Wiley, 1995.

[2] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.