Nombres rationnels

1 Définition de $\mathbb{Q}$

On définit, sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, la relation binaire $\mathfrak{R}$ de la façon suivante :

$$(a,b)\mathfrak{R}(a',b') \iff ab' = ba'$$

Propriété 1.1 *$\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration :

- Réflexivité : Elle découle de la commutativité de la multiplication sur $\mathbb{Z}$.
- Symétrie : Idem.
- Transitivité :
  Soient (a,b), (a',b') et (a'',b'') tels que $(a,b)\mathfrak{R}(a',b')$ et $(a',b')\mathfrak{R}(a'',b'')$. Alors :
  $$\left.\begin{array}{r} ab' = ba' \\ a'b'' = b'a'' \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad aa'b'b'' = ba'b'a'' \quad \Longrightarrow \quad aa'b'' = ba'a''$$
  Si $a' \neq 0$, on obtient $ab'' = ba''$ donc $(a,b)\mathfrak{R}(a'',b'')$.
  Sinon, $a' = 0$ donc $a = 0$ et $a'' = 0$; on a encore $ab'' = ba''$ donc $(a,b)\mathfrak{R}(a'',b'')$.

□

Définition Un *nombre rationnel* est la classe d'équivalence d'un élément (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$; on le note $\frac{a}{b}$. Et l'on note $\mathbb{Q}$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathfrak{R}$ des nombres rationnels.

N.B. Attention : $\frac{a}{b}$ n'est rien d'autre qu'une notation pour désigner le rationnel dont un représentant est le couple (a,b). Ceci justifie également toutes les égalités de type $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, qui signifie que les deux rationnels sont égaux, mais absolument pas les deux représentants (a,b) et (c,d).

Définition a est appelé *numérateur* du représentant (a,b) de $\frac{a}{b}$; b est appelé son *dénominateur*.

Remarque Pour tout couple (a,b), on a :

$$\frac{0}{1} = \frac{a}{b} \iff a = 0$$

On note $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{0}{1}\right\}$ des rationnels non nuls.

2 Représentants privilégiés d'un rationnel

Théorème 2.1 *Soit $\frac{a}{b}$ un rationnel non nul. Alors il existe un unique couple (p,q) dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}_+^*$, appelé représentant irréductible de $\frac{a}{b}$, qui vérifie :*

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \quad \textit{et} \quad p \wedge q = 1$$

(où $p \wedge q$ désigne le PGCD des entiers p et q.)

Démonstration :

- <u>Unicité :</u>
  Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Soit un tel couple (p,q), vérifiant donc $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$, avec p et q premiers entre eux.
  Soit $\delta = a \wedge b \in \mathbb{N}^*$, et a' et b' deux entiers vérifiant $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ (et donc $a' \wedge b' = 1$, cf le texte sur les entiers relatifs).
  On a alors $p\delta b' = q\delta a'$ donc $pb' = qa'$. Comme $a' \wedge b' = 1$, on en déduit (lemme de Gauss) que $p|a'$ (et $q|b'$). C'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $a' = pk$. Mais alors, en remplaçant a' par pk dans l´égalité $pb' = qa'$, il vient après simplification par p : $b' = qk$. L'entier k est donc un diviseur commun de a' et b'.
  Comme on a $a' \wedge b' = 1$, on obtient $k = \pm 1$, et donc $(p,q) = (a',b')$ ou bien $(p,q) = (-a',-b')$. L'unicité découle alors de la condition $q > 0$.
- <u>Existence :</u>
  Au signe près, le couple (a',b') construit vérifie la propriété voulue. Si $b' < 0$, il suffit de prendre le couple $(-a',-b')$.

$\square$

Propriété 2.2 *Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels. Soit μ le PPCM de b et d. Alors il existe deux entiers a_1 et c_1 tels que :*

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu} \quad \textit{et} \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu}$$

N.B. Effectuer une telle opération (déterminer les entiers a_1 et c_1) s'appelle *réduire au même dénominateur* les deux rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

Démonstration : Soient en effet $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels, μ le PPCM de b et d. soient h et k deux entiers tels que $\mu = bh = dk$.

On vérifie sans problème que $(a,b)\mathfrak{R}(ah,bh)$, et donc que

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \text{où l'on a posé } a_1 = ah.$$

De même $$\frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu}, \quad \text{où l'on a posé } c_1 = ck.$$ $\square$

3 Opérations sur $\mathbb{Q}$

3.1 Addition

Soit, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, l'addition définie par $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$. Cette addition est compatible avec la relation $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\mathfrak{R}(a',b')\\(c,d)\mathfrak{R}(c',d')\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad ((a,b)+(c,d))\,\mathfrak{R}\,((a',b')+(c',d'))$$

En effet, la conclusion équivaut à $(ad + bc, bd)\mathfrak{R}(a'd' + b'c', b'd')$, c'est-à-dire à $(ad+bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd$, soit encore $adb'd' + bcb'd' = a'd'bd + b'c'bd$, ce qui est vrai car par hypothèse $ab' = a'b$ et $cd' = c'd$.

Cette addition définit donc par passage au quotient une opération (toujours appelée addition) sur $\mathbb{Q}$, en posant donc $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Théorème 3.1 $(\mathbb{Q}, +)$ *est un groupe commutatif.*

Démonstration :

- Commutativité :
  Immédiat par commutativité de la multiplication et de l'addition sur $\mathbb{Z}$.
- Associativité :
  Soient $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ dans $\mathbb{Q}$. En posant $\mu = b \vee d \vee f$ (PPCM de b, d et f), on a trois entiers a_1, c_1 et e_1 tels que :
  $$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{e}{f} = \frac{e_1}{\mu}$$
  Après simplifications :
  $$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \left(\frac{a_1}{\mu} + \frac{c_1}{\mu}\right) + \frac{e_1}{\mu} = \frac{(a_1 + c_1) + e_1}{\mu}$$
  et de même
  $$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a_1 + (c_1 + e_1)}{\mu}$$
  On conclut alors par associativité de l'addition des entiers.
- $\frac{0}{1}$ est élément neutre pour l'addition :
  $$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1 + 0.b}{b.1} = \frac{a}{b}$$
- Opposé de $\frac{a}{b}$:
  On a
  $$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b} = \frac{0}{1}$$
  donc $\frac{a}{b}$ admet pour opposé $\frac{-a}{b}$, qui est donc aussi noté $-\frac{a}{b}$. On note également $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ pour la différence $\frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$.

$\square$

3.2 Multiplication

De la même façon, on définit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la multiplication (notée $\times$) par $(a,b) \times (c,d) = (ac, bd)$. Elle est compatible avec $\mathfrak{R}$. Soient en effet quatres couples d'entiers $(a,b)\mathfrak{R}(a',b')$ et $(c,d)\mathfrak{R}(c',d')$.

Alors $$ab' = ba' \quad \text{et} \quad cd' = dc'$$

Or $$\begin{aligned} pa(a,b) \times (c,d)\mathfrak{R}\left((a',b') \times (c',d')\right) &\iff (ac,bd)\mathfrak{R}(a'c',b'd') \\ &\iff acb'd' = bda'c' \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découlant immédiatement des hypothèses, par multiplication terme à terme (dans $\mathbb{Z}$).

D'où par passage au quotient une multiplication sur $\mathbb{Q}$, définie par $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

Théorème 3.2 $(\mathbb{Q}, +, \times)$ *est un corps commutatif.*

Démonstration : Puisqu'on sait déjà que $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe commutatif, il ne reste à démontrer que les propriétés relatives à la loi $\times$.

- Commutativité :
  Immédiat par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.
- Associativité :
  Idem, en utilisant l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.
- Distributivité sur l'addition :
  Soient $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$ dans $\mathbb{Q}$. On a des entiers a_1, c_1 et e_1 tels que
  $$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{e}{f} = \frac{e_1}{\mu} \quad (\text{avec } \mu = b \vee d \vee f\ )$$
  Alors $$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a_1}{\mu} \times \left(\frac{c_1}{\mu} + \frac{e_1}{\mu}\right) = \frac{a_1(c_1 + e_1)}{\mu^2} = \frac{a_1c_1 + a_1e_1}{\mu^2}$$
  et $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{a_1}{\mu} \times \frac{c_1}{\mu} + \frac{a_1}{\mu} \times \frac{e_1}{\mu} = \frac{a_1c_1 + a_1e_1}{\mu^2}$$
  La distributivité à droite en découle, grâce à la commutativité de la multiplication, déjà démontrée.
- $\dfrac{1}{1}$ est élément neutre :
  $$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b}$$
- Inverse de $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$:
  Si $\dfrac{a}{b}$ est dans $\mathbb{Q}^*$, alors a est non nul, donc le rationnel $\dfrac{b}{a}$ est bien défini. Et il vérifie :
  $$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1}$$
  donc $\dfrac{a}{b}$ est inversible et son inverse est $\dfrac{b}{a}$.

$\square$

4 Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$

Remarque Pour tout rationnel $\alpha \in \mathrm{Q}^*$, pour tout représentant (a, b) de α, le signe du produit ab est constant (il ne dépend pas du représentant choisi).

En effet, soit (p, q) le représentant irréductible de α. On a un entier k tel que $a = kp$ et $b = kq$, donc $ab = k^2pq$ a le signe de pq.

Définition $\dfrac{a}{b}$ est *strictement positif* si et seulement si $ab > 0$; $\dfrac{a}{b}$ est *strictement négatif* si et seulement si $ab < 0$.

Notations : On note $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des rationnels strictement positifs, $\mathbb{Q}_-^*$ l'ensemble des rationnels strictement négatifs ; on note $\mathbb{Q}_+$ (resp. $\mathbb{Q}_-$) l'ensemble $\mathbb{Q}_+^* \cup \left\{\dfrac{0}{1}\right\}$ (resp. l'ensemble $\mathbb{Q}_-^* \cup \left\{\dfrac{0}{1}\right\}$).

On a alors
$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \iff ab \geq 0$$

En effet, si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$, alors $ab > 0$, et si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{0}{1}$, alors $ab = 0$. Réciproquement, si $ab > 0$, alors $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$ et si $ab = 0$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{0}{1}$

De même
$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_- \iff ab \leq 0$$

De ces propriété, on déduit des propriétés de signe de la somme et du produit de deux rationnels :

Propriété 4.1
$$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+ \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}_+, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$$

De même
$$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_- \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}_-, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$$

Enfin
$$\alpha \in \mathbb{Q}_+, \beta \in \mathbb{Q}_- \Longrightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Q}_-$$

On est désormais en mesure de définir la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$:

Définition On définit ainsi la relation binaire $\leq$ sur $\mathbb{Q}$:
$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$$

Théorème 4.2 *$\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration :

- <u>Réflexivité :</u>
$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}_+ \quad \text{donc} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$$
- <u>Antisymétrie :</u>
Si $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{c}{d} \leq \dfrac{a}{b}$, alors $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, et $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, donc
$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \left\{\frac{0}{1}\right\}$$
et donc
$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

- Transitivité :
  Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, alors $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $\frac{e}{f} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$. Or nous avons vu que $\mathbb{Q}_+$ est stable par la loi $+$, donc
  $$\frac{e}{f} - \frac{a}{b} = \left(\frac{e}{f} - \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Q}_+ \quad \text{donc} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$$
- Ordre total :
  On a $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$, donc pour tout couple de rationnels $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$, la différence $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ est nécessairement dans $\mathbb{Q}_+$ ou dans $\mathbb{Q}_-$. Selon les cas, on a alors $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ou bien $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$.

$\square$

Remarque

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_-$ et $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, alors $\frac{a}{b} \leq \frac{0}{1}$ et $\frac{0}{1} \leq \frac{c}{d}$, donc par transitivité $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

Propriété 4.3 *La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la loi $+$ sur $\mathbb{Q}$, et avec la loi $\times$ sur $\mathbb{Q}_+$.*

Démonstration : Soient donc quatres rationnels $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \leq \frac{c'}{d'}$. Alors on a $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $\frac{c'}{d'} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, et donc en sommant :

$$\left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c'}{d'} - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}_+$$

On a montré $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$$

Supposons désormais de plus ces rationnels positifs. Quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer $b = b' = d = d'$. On a alors $0 \leq a \leq a'$ et $0 \leq c \leq c'$. donc (dans $\mathbb{Z}$) $ac \leq a'c'$.

On obtient $\frac{a'c' - ac}{b^2} \in \mathbb{Q}_+$, et donc

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} \leq \frac{a'}{b} \times \frac{c'}{b}$$

$\square$

Notation :(ordre strict sur $\mathbb{Q}$)

On pose : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \end{cases}$$

Alors $$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \setminus \left\{\frac{0}{1}\right\} = \mathbb{Q}_+^*$$

Définition Soit G un groupe (additif) ordonné.

- On note G_+ l'ensemble des éléments de G supérieurs ou égaux à l'élément neutre 0. G_+^* désignera l'ensemble $G_+ \setminus \{0\}$.

– Étant donné un élément a du groupe G, et n un entier naturel, $n.a$ désigne l'élément $a + a + \cdots + a$ (n occurences de l'élément a).
– Le groupe G est dit *archimédien* s'il vérifie la propriété :

$$\forall b \in \mathrm{G}_+ \forall a \in \mathrm{G}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, \quad b \leq n.a$$

Propriété 4.4 *$\mathbb{Q}$ est archimédien.*

Démonstration : Soit en effet β un rationnel positif et α un rationnel strictement positif. Si $\beta = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, quitte à réduire au même dénominateur (propriété 2.2), on peut supposer α de la forme $\dfrac{a}{q}$ et β de la forme $\dfrac{b}{q}$, où a, b et q sont des entiers naturels non nuls.

On a alors $a \geq 1$, et donc $a \times \beta \geq \beta$ (la relation d'ordre est compatible avec la multiplication, sur $\mathbb{Q}_+$). Or $a \times \beta = \dfrac{ab}{q} = b \times \alpha$, donc $b\alpha \geq \beta$.

$\square$

5 Plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

Soit $\mathbb{Q}'$ l'ensemble $\left\{\dfrac{m}{1}, m \in \mathbb{Z}\right\}$. Il s'agit bien sûr d'un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Il est immédiat de vérifier que $\mathbb{Q}'$ est stable pour les lois $+$ et $\times$ (en revenant aux définitions de ces lois, on vérifie que $\dfrac{m}{1} + \dfrac{n}{1} = \dfrac{m+n}{1}$ et $\dfrac{m}{1} \times \dfrac{n}{1} = \dfrac{mn}{1}$) ; et que $\mathbb{Q}'$ est également stable par passage à l'opposé pour la loi $+$. On en déduit que $(\mathbb{Q}', +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Soit l'application f, de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}'$ définie par $m \longmapsto \dfrac{m}{1}$. On a, d'après la remarque précédente, pour tous entiers m et n, les relations

$$f(m+n) = f(m) + f(n) \text{ et } f(mn) = f(m)f(n)$$

De plus $$\forall \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}' \ \exists! n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \frac{m}{1}$$

En effet $$f(n) = \frac{m}{1} \Longleftrightarrow \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \Longleftrightarrow n = m$$

On a montré que f est un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}'$.
Enfin $f(m) \leq f(n) \Longleftrightarrow \dfrac{m}{1} \leq \dfrac{n}{1} \Longleftrightarrow \dfrac{m-n}{1} \leq \dfrac{0}{1} \Longleftrightarrow m - n \leq 0 \Longleftrightarrow m \leq n$, c'est-à-dire que l'isomorphisme f est compatible avec les relations d'ordre sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Convention : On identifie, compte-tenu de l'isomorphisme f, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}'$ en écrivant m le rationnel $\dfrac{m}{1}$ (en particulier : $0 = \dfrac{0}{1}$ et $1 = \dfrac{1}{1}$).

Ainsi, on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; et les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Q}$ *prolongent* respectivement les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}$; l'ordre total $\leq$ sur $\mathbb{Q}$ *prolonge* quant à lui l'ordre total $\leq$ sur $\mathbb{Z}$.

Remarque Avec cette écriture, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

6 Valeur absolue sur $\mathbb{Q}$

On définit sur $\mathbb{Q}$ la *valeur absolue* en posant, pour tout rationnel α :

$$|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$$

Cette définition est justifiée car on a montré que $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{Q}$ (et donc, pour tout rationnel α, l'ensemble $\{\alpha, -\alpha\}$ admet un plus grand élément). En particulier, on a $|-\alpha| = |\alpha|$ pour tout α.
Remarque Cette valeur absolue prolonge la valeur absolue déjà définie sur $\mathbb{Z}$.

Propriété 6.1 *Pour tous α et β rationnels, on a*

$$\alpha^2 = \beta^2 \iff |\alpha| = |\beta|$$

Démonstration :
$\boxed{\Rightarrow}$ Dans le corps $\mathbb{Q}$, on peut factoriser l'égalité $\alpha^2 = \beta^2$ pour obtenir $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$, donc $\alpha = \pm\beta$, ce qui entraîne $|\alpha| = |\beta|$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, alors $|\alpha| = |\beta|$ entraîne $\alpha = \beta$ et donc $\alpha^2 = \beta^2$.
Les autres cas se tritent de la même façon : si $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 0$, on obtient $\alpha = -\beta$ et donc $\alpha^2 = \beta^2$, et ainsi de suite.

$\square$

Propriété 6.2 *Pour tous rationnels α et β, on a $|\alpha\beta| = |\alpha| \times |\beta|$.*

Démonstration : Il suffit là encore de distinguer les cas, en fonction des signes de α et β.

$\square$

Propriété 6.3 *Pour tous rationnels α et β, on a $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.*

Démonstration : Remarquons tout d'abord que pour tous rationnels positifs α et β, on a l'équivalence $\alpha \leq \beta \iff \alpha^2 \leq \beta^2$. En effet $\Rightarrow$ s'obtient grâce à la compatibilité de $\leq$ avec la multiplication (sur $\mathbb{Q}_+$), et $\Leftarrow$ par contraposée, pour les mêmes raisons.

On peut alors raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\iff |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\
&\iff \left|(\alpha + \beta)^2\right| \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \\
&\iff (\alpha + \beta)^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \\
&\iff 2\alpha\beta \leq 2|\alpha||\beta|
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vraie (car $|\alpha| \times |\beta| = |\alpha\beta|$), il en est de même de la première...

$\square$