Idéaux d'un anneau commutatif unitaire

1 Définitions

Définition Soit un anneau commutatif unitaire $(\mathrm{A}, +, \times)$ et I une partie de A. I est un *idéal* de A si et seulement si :

(i) $(\mathrm{I}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{A}, +)$.

(ii) $\forall x \in \mathrm{I}, \forall a \in \mathrm{A}, \quad a \times x \in \mathrm{I}$

(On notera 0 et 1 les éléments neutres respectifs de A pour les lois + et $\times$)

Propriété 1.1 *Soit* A *un anneau commutatif unitaire et* I *une partie de* A. *Alors* I *est un idéal de* A *si et seulement si :*

$$\begin{cases} \mathrm{I} \neq \emptyset \\ \mathrm{I} \textit{ est stable pour la loi } + \\ \forall x \in \mathrm{I}, \forall a \in \mathrm{A}, \quad a \times x \in \mathrm{I} \end{cases}$$

Démonstration : En effet, la condition est nécessaire (elle est contenue dans la définition d'un idéal). Réciproquement, si ces trois conditions sont réalisées, alors pour tout élément x de I, on a :

$$(-1) \times x = -x \in \mathrm{I} \quad \text{et} \quad 0 \times x = 0 \in \mathrm{I}$$

Donc $(\mathrm{I}, +)$ est bien un sous-groupe de $(\mathrm{A}, +)$, et donc un idéal de A.

□

Remarques

- Si $1 \in \mathrm{I}$, alors pour tout élément a de A, on a $1 \times a = a \in \mathrm{I}$; donc $\mathrm{I} = \mathrm{A}$.
- $\{0\}$ est un idéal de A.
- Pour tout a dans A, l'ensemble $a\mathrm{A} = \{a \times x\}_{x \in \mathrm{A}}$ est un idéal de A.

Définition Tout idéal de A de la forme $a\mathrm{A}$ (où a est élément de A) est appelé *idéal principal*. L'anneau A est dit *principal* si et seulement si tous ses idéaux sont principaux.

Propriété 1.2 *(stabilité par intersection et somme)*

- *Si* $(\mathrm{I}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{J}}$ *est une famille (non vide) d'idéaux de* A, *alors* $\bigcap_{\lambda \in \mathrm{J}} \mathrm{I}_\lambda$ *est encore un idéal de* A.
- *Si* I_1 *et* I_2 *sont deux idéaux de* A, *alors* $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$ *est encore un idéal, où :*

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \{x \in \mathrm{A}, \quad x = x_1 + x_2 \textit{ avec } x_1 \in \mathrm{I}_1 \textit{ et } x_2 \in \mathrm{I}_2\}$$

Démonstration : Immédiate en revenant à la deuxième définition d'un idéal (propriété 1.1). Notons juste que l'ensemble $\bigcap_{\lambda \in \mathrm{J}} \mathrm{I}_\lambda$ est non vide car pour tout λ, on a $0 \in \mathrm{I}_\lambda$.

□

2 Anneaux euclidiens

Définition Un anneau A est dit *intègre* s'il ne contient pas de diviseur de 0. (C'est-à-dire si pour tout couple (a, b), on a $a \times b = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.)

Exemples : Tout corps est un anneau intègre. L'anneau $\mathbb{Z}$ également. En revanche, l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ensemble des couples d'entiers, muni de l'addition et de la multiplication terme à terme) n'est pas intègre. En effet, on a l'égalité $(0,1) \times (1,0) = (0,0)$, et pourtant aucun de ces deux facteurs n'est 0.

Définition On dit qu'un anneau commutatif A est muni d'une *division euclidienne* s'il existe une fonction v (appelée stathme) à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur $\mathrm{A} \setminus \{0\}$, et telle que :

$$\forall a, b \in \mathrm{A} \setminus \{0\}, \exists q, r \in \mathrm{A}, \quad a = b \times q + r \text{ avec } (r = 0 \text{ ou } v(r) < v(b))$$

Définition Un anneau A est dit *euclidien* s'il est intègre et muni d'une division euclidienne.

Théorème 2.1 *Tout anneau euclidien est principal.*

Démonstration : Soit v le stathme associé à la division euclidienne dans A. Soit I un idéal de A, et b un élément non nul de I de valence minimale, c'est-à-dire vérifiant :

$$v(b) = \min_{a \in \mathrm{I} \setminus \{0\}} v(a)$$

Alors, par définition d'un idéal, on a $b\mathrm{A} \subset \mathrm{I}$. Montrons l'inclusion inverse. Soit a un élément de I. On effectue la division euclidienne de a par b. Soient q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } (r = 0 \text{ ou } v(r) < v(b))$$

Comme I est un sous-groupe de A pour la loi $+$, on a $b \times q \in b\mathrm{A} \subset \mathrm{I}$ et $a \in \mathrm{I}$ par hypothèse, donc $a - b \times q \in \mathrm{I}$. C'est-à-dire que r est dans I. Mais alors, si r n'est pas l'élément 0, r contredit la définition de b (ayant une valence strictement inférieure). Donc $r = 0$, et donc $a = b \times q$. On a montré que tout élément de I est multiple de b, et donc :

$$\mathrm{I} = b\mathrm{A}$$

c'est-à-dire que tout idéal de A est principal. □

Exemples : L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est de ce fait principal. Il en va de même pour l'anneau $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ des polynômes à une indéterminée sur un corps $\mathbb{K}$. On a en effet une division euclidienne sur les polynômes, avec pour stathme v la fonction degré du polynôme.

Références

[1] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.