Cardinaux

Dans ce texte, nous allons présenter la théorie des cardinaux, du moins son début : définition, cardinal d'un ensemble et théorème de Cantor-Bernstein, addition et multiplication cardinale. Nous passerons notamment sous silence le problème de l'exponentiation cardinale, qui est autrement plus compliqué. Tout ceci nécessite entre autres choses une certaine familiarité avec la notion d'ordinal, nous renvoyons donc le lecteur au texte sur les ordinaux pour ceci, ou à l'ouvrage de J.L. Krivine ([1]) pour une étude plus complète.

Enfin, la théorie des cardinaux est bien moins fournie si l'on ne s'autorise pas l'axiome du choix, aussi nous le supposerons vrai ici. Cependant, comme nous ne l'utiliserons réellement que deux ou trois fois, les résultats qui l'utilisent seront signalés par le symbole (AC). En ce qui concerne le théorème de Cantor-Bernstein notamment, nous avons tenu à isoler du reste la partie utilisant réellement l'axiome du choix, partie qui n'est pas forcément la plus intéressante d'un point de vue de la démonstration...

1 Ordinaux, cardinaux

1.1 Définition. Exemples et contre-exemples.

Définition Un ordinal ω est un *cardinal* si et seulement si ω n'est en bijection avec aucun ordinal $\alpha \prec \omega$.

N.B. Il ne faut pas confondre cette condition avec l'existence d'une bijection de l'ordinal avec une de ses parties propres, ce qui signifie simplement que l'ordinal est infini. Ainsi, nous allons voir que $\mathbb{N}$ est un cardinal, et pourtant $\mathbb{N}$ est en bijection avec nombre de ses parties propres.

Exemples :

- Tout entier naturel est un cardinal.
  Supposons en effet qu'un entier n soit en bijection avec un ordinal m strictement plus petit que lui. Supposons de plus que n est le plus petit entier ayant cette propriété. Alors manifestement, m ne peut être égal à 0, car une ensemble non vide ne peut être en bijection avec l'ensemble vide. n non plus ne peut être 0 car n est strictement plus grand que m.
  Donc n et m sont tous deux des ordinaux successeurs, de la forme $n' \cup \{n'\}$ et $m' \cup \{m'\}$ respectivement. Soit f la bijection entre ces deux ensembles. Si $f(n') = m'$, alors f induit par restriction une bijection entre n' et m', contredisant la minimalité de n.
  Sinon, soient $i = f(n')$ et $j = f^{-1}(m')$. La fonction g définie par $g(k) = f(k)$ si $k \neq j, n'$ et par $g(j) = i, g(n') = m'$ est encore une bijection et permet de conclure.

Inversement, tout cardinal fini est un ordinal fini, donc un entier naturel.

– $\mathbb{N}$ est un cardinal.
  Soit en effet un ordinal $\alpha \prec \mathbb{N}$: α est donc fini et $\mathbb{N}$ (infini) ne peut être en bijection avec α. Pour être plus précis, une bijection de $\mathbb{N}$ sur α induirait une injection de $\alpha + 1$ dans α, ce qui est absurde (on peut raisonner comme dans l'exemple précédent en supposant que α est le plus petit ordinal ayant cette propriété).

Contre-exemples :

– $\mathbb{N} + 1$ est en bijection avec $\mathbb{N}$, donc l'ordinal $\mathbb{N} + 1$ n'est pas un cardinal.
– $\mathbb{N}^2 = \{k\mathbb{N} + p\}_{(k,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (voir le texte "Ordinaux" pour la définition de cette bijection), ensemble qui est lui-même en bijection avec $\mathbb{N}$ (par exemple par l'application qui numérote les couples d'entiers de façon diagonale dans le plan...) donc l'ordinal $\mathbb{N}^2$ n'est pas un cardinal.

Propriété 1.1 *Soient α et β deux cardinaux, tels qu'il existe une bijection de α sur β. Alors $\alpha = \beta$.*

Démonstration : La preuve de ceci repose sur la définition même d'un cardinal. α et β sont des ordinaux, donc s'ils sont distincts, alors l'un est plus petit que l'autre, disons $\alpha \prec \beta$.

Mais alors l'hypothèse revient à affirmer l'existence d'une bijection du cardinal β sur un ordinal plus petit, ce qui est absurde.

□

1.2 Cardinal d'un ensemble

Propriété 1.2 *Tout ordinal est en bijection avec un unique cardinal.*

Démonstration :

Soit ω un ordinal qui n'est pas un cardinal (sinon, la bijection est toute trouvée).

Soit α le plus petit ordinal en bijection avec ω. Cet ordinal existe et est bien défini, puisque la partie des ordinaux constituée des ordinaux en bijection avec ω est non vide (elle contient ω) donc admet un plus petit élément.

Alors α est naturellement en bijection avec ω, et α est un cardinal. En effet, si α était en bijection avec un ordinal β plus petit, alors par transitivité ω serait en bijection avec β et β contredirait la définition de α.

L'unicité de ce cardinal découle de la propriété 1.1.

□

Théorème 1.3 *(AC) Soit* E *un ensemble. Il existe un unique cardinal α en bijection avec* E*. Le cardinal α est appelé cardinal de* E*, et noté* $\mathit{Card}(\mathrm{E})$ *ou* $|\mathrm{E}|$.

Démonstration : L'unicité découle de la propriété 1.1 : si deux cardinaux sont en bijection avec un même ensemble E, alors ils sont eux-même en bijection, donc égaux.

L'existence découle de l'axiome du choix, qui affirme que tout ensemble peut être muni d'un bon ordre, c'est-à-dire que tout ensemble est en bijection avec un ordinal. Or un tel ordinal est en bijection avec un cardinal, d'après la propriété précédente, ce qui permet de conclure, toujours par transitivité.

□

Remarques
- Si E est un cardinal, alors $\mathrm{C}ard\,(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.
- Si $\mathrm{C}ard\,(\mathrm{E}) = n \in \mathbb{N}$, l'ensemble E est dit *fini* ; l'entier n est le *nombre d'éléments* de E. À l'opposé, un ensemble E est dit *infini* s'il n'est pas fini, c'est-à-dire si son cardinal est infini, en tant qu'ordinal.

Définition Un ensemble E est dit *dénombrable* si et seulement si il vérifie $\mathrm{C}ard\,(\mathrm{E}) \leq \mathbb{N}$.

En particulier, tout ensemble fini est dénombrable. Et un ensemble E infini est dénombrable si et seulement si son cardinal est $\mathbb{N}$.
Exemple : Les ensembles $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2 = \{k\mathbb{N} + p\}_{(k,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ sont tous deux en bijection avec $\mathbb{N}$, donc dénombrables.

Enfin, on obtient en combinant les résultats qui précède :

Propriété 1.4 *Deux ensembles* E *et* F *sont en bijection (ou équipotents) si et seulement si ils ont même cardinal.*

Démonstration : Par composition des bijection et par la propriété 1.1.

□

1.3 Injections ordinales

Commençons par énoncer une propriété évidente :

Propriété 1.5 *Soient α et β deux ordinaux, avec $\alpha \leq \beta$. Alors il existe une injection de α dans β.*

Démonstration : En effet $\alpha \leq \beta$ entraine $\alpha \subset \beta$. Donc on dispose d'une injection canonique de α dans β, qui coïncide avec l'identité sur α.

□

Bien sûr, la réciproque est fausse ($\mathbb{N} + 1$ s'injecte dans $\mathbb{N}$, par exemple). Cependant, on a tout de même le résultat suivant :

Lemme 1.6 *Soit* A *une partie d'un ordinal ω. Alors l'ordinal de l'ensemble* A *muni de la relation d'appartenance est inférieur ou égal à ω*

Ce résultat, et surtout sa démonstration, ont plus à voir avec la théorie des ordinaux que celle des cardinaux. Étant par ailleurs assez lourde, nous la présentons simplement en annexe de ce texte, par souci de complétude. Elle repose sur une récurrence (transifinie) sur l'ordinal ω. Et l'on doit à chaque étape distinguer deux cas : ω est un ordinal successeur ou ω est un ordinal limite. Ceci permet d'obtenir le

Théorème 1.7 *Soient α et β deux ordinaux, tels que α s'injecte dans β. Alors il existe un ordinal $\gamma \leq \beta$ tel que α est en bijection avec γ.*

Démonstration : Soient donc α et β deux ordinaux, et f une injection de α dans β. L'image A de α par f est une partie de β. Par le théorème précédent, il existe une bijection de A sur un ordinal $\gamma \leq \beta$. Par composition de ces deux applications, on obtient une bijection de α sur γ, où $\gamma \leq \beta$.

□

Corollaire 1.8 *Si l'ordinal α s'injecte dans l'ordinal β, alors*

$$\mathrm{C}ard(\alpha) \leq \mathrm{C}ard(\beta)$$

Démonstration : D'après le théorème précédent, α est en bijection avec un ordinal $\gamma \leq \beta$. Le cardinal de α est alors le cardinal de γ, soit un ordinal inférieur ou égal à γ, donc à β. Il est enfin inférieur ou égal au cardinal de β :

Si f désigne une bijection de β sur son cardinal $\mathrm{C}ard(\beta)$, alors f induit une bijection de $\gamma \subset \beta$ sur une partie A de $\mathrm{C}ard(\beta)$. D'après le lemme 1.6, cette partie là est elle même en bijection avec un ordinal $\delta \leq \mathrm{C}ard(\beta)$, elle est donc de cardinal inférieur ou égal à δ donc à $\mathrm{C}ard(\beta)$, et l'on a bien :

$$\mathrm{C}ard(\alpha) \leq \mathrm{C}ard(\beta)$$

□

Théorème 1.9 *(Cantor Bernstein)*

- *Soient α et β deux cardinaux, tels qu'il existe une injection de α dans β et une injection de β dans α. Alors $\alpha = \beta$.*
- *Soient α et β deux ordinaux, tels qu'il existe une injection de α dans β et une injection de β dans α. Alors il existe une bijection de α sur β.*
- *(AC) Soient* E *et* F *deux ensembles, tels qu'il existe une injection de* E *dans* F *et une injection de* F *dans* E*. Alors il existe une bijection de* E *sur* F.

Démonstration : Nous allons montrer ces trois points dans l'ordre dans lequel ils ont été énoncés.

- Soient α et β deux cardinaux vérifiant ces hypothèses. Il existe une injection de α dans β, donc d'après le théorème 1.7, $\mathrm{C}ard(\alpha) \leq \mathrm{C}ard(\beta)$, c'est-à-dire $\alpha \leq \beta$ puisque ces ordinaux sont leurs propres cardinaux.
  De même, on a $\beta \leq \alpha$ grâce à l'injection de β dans α. Donc $\alpha = \beta$.
- Soient maintenant α et β deux ordinaux vérifiant ces hypothèses. Le raisonnement précédent nous montre que $\mathrm{C}ard(\alpha) = \mathrm{C}ard(\beta)$. Or par définition, il existe une bijection de α sur $\mathrm{C}ard(\alpha)$ et une bijection de β sur $\mathrm{C}ard(\beta)$.
  Par composition, on obtient une bijection de α sur β.
- Soient enfin deux ensembles E et F vérifiant nos hypothèses. Modulo l'axiom du choix, il existe deux ordinaux α et β en bijection avec E et F respectivement. Par composition, on a alors une injection de α dans β et une injection de β dans α, et donc une bijection de α sur β d'après le point précédent.
  En composant encore une fois nos bijections, on trouve une bijection de E sur F.

□

1.4 La classe des cardinaux

Nous avons déjà vu que les entiers naturels sont des cardinaux, ainsi que $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers ou encore le plus petit ordinal infini (qui existe modulo l'axiome de l'infini, cf le texte sur les ordinaux). Mais y en a-t'il beaucoup d'autres ? La réponse est positive : non seulement le théorème de Cantor va nous permettre d'en construire récursivement une infinité, mais on peut aussi prouver que, tout comme pour les ordinaux, il n'y a pas d'ensemble de tous les cardinaux : c'est une classe propre. (Nous ne prouverons pas ce résultat ici, il nécessiterait l'introduction de bon nombre d'outil ; et le tout serait un peu fastidieux sachant que l'on utilise pas les notions en jeu dans le reste de ce texte).

Théorème 1.10 (Cantor) *Soit* E *un ensemble et* $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ *l'ensemble des parties de* E.

Alors
$$Card(\mathrm{E}) \prec Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E}))$$

Démonstration : L'application f de E dans $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ définie par $f(x) = \{x\}$ est injective donc $Card(\mathrm{E}) \leq Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E}))$.

Supposons que $Card(\mathrm{E}) = Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E}))$: soit donc g une bijection de E sur $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$. Soit $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \backslash x \notin g(x)\} \in \mathfrak{P}(\mathrm{E})$: il existe un unique $a \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{A} = g(a)$.

Si $a \in \mathrm{A}$, alors $a \notin g(a)$ donc $a \notin \mathrm{A}$ par définition de A ; mais si $a \notin \mathrm{A}$, alors $a \notin g(a)$ donc $a \in \mathrm{A}$ par définition de A.

Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction, l'ensemble A ne peut donc être l'image d'un élément a par g, qui n'est donc pas bijective.

□

Corollaire 1.11 *Pour tout cardinal* α*, il existe un cardinal* $\beta \succ \alpha$.

Il suffit de prendre $\beta = Card(\mathfrak{P}(\alpha))$.

On note traditionnellement $\aleph_0 = \mathbb{N}$ et $\aleph_1 = Card(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$; on a donc $\aleph_1 \succ \aleph_0$. Si $Card(\mathrm{E}) = \aleph_1$, on dit que E a la *puissance du continu.*

Hypothèse du continu :(HC) Il n'existe aucun cardinal α tel que $\aleph_0 \prec \alpha \prec \aleph_1$.

N.B. Cette hypothèse est, de même que sa négation, compatible avec les autres axiomes de la théorie des ensembles. C'est-à-dire qui si la théorie des ensembles ZF est cohérente (ce qui est indémontrable, d'après le second théorème d'incomplétude de Gödel), alors il en est de même pour ZF+HC et ZF+non(HC). Le premier résultat est dû à Gödel, le second à Paul Cohen grâce à la méthode du forcing. Pour tout ceci, voir par exemple le livre de Krivine ([1]).

2 Somme de deux cardinaux

2.1 Définition de la somme cardinale

Propriété 2.1 *Soient deux ensembles quelconques* A *et* B*. Alors il existe deux ensembles* A' *et* B'*, respectivement équipotents à* A *et* B*, et tels que* $\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' = \emptyset$.

Il suffit de prendre $A' = A \times \{0\}$ et $B' = B \times \{1\}$: on a $A' \cap B' = \emptyset$; et les applications $f : A \to A'$, $x \mapsto (x, 0)$ et $g : B \to B'$, $x \mapsto (x, 1)$ sont des bijections.

N.B. α et β étant des cardinaux quelconques, il existe des ensembles A et B tels que $\alpha = Card(A)$, $\beta = Card(B)$, et $A \cap B = \emptyset$.

Théorème 2.2 *Soient des ensembles* A *et* A_1 *équipotents,* B *et* B_1 *équipotents, avec* $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \emptyset$. *Alors :* $Card(A \cup B) = Card(A_1 \cup B_1)$.

Démonstration : Soient les bijections $f : A \to A_1$ et $g : B \to B_1$. Soit l'application $F : A \cup B \to A_1 \cup B_1$ définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in B \end{cases}$$

Alors F est bijective. Soit en effet $y \in A_1 \cup B_1$:

– Si $y \in A_1$, alors $y = F(x) \Rightarrow x \in A$ (car $y \notin B_1$) donc

$$y = F(x) \Longleftrightarrow y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

– Si $y \in B_1$, alors $y = F(x) \Rightarrow x \in B$ (car $y \notin A_1$) donc

$$y = F(x) \Longleftrightarrow y = g(x) \Longleftrightarrow x = g^{-1}(y)$$

□

Ceci légitime la définition suivante :

Définition Soient $\alpha = Card(A)$ et $\beta = Card(B)$ avec $A \cap B = \emptyset$: la *somme* $\alpha \oplus \beta$ est $Card(A \cup B)$.

(La notation $\oplus$ évite la confusion avec les écritures d'ordinaux comme $\mathbb{N}+1$, déjà rencontrées).

EXEMPLES :

- $\mathbb{N} \oplus 1 = \mathbb{N}$:
  $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents donc $\mathbb{N} = Card(\mathbb{N}^*)$; $1 = \{0\}$; $\mathbb{N}^* \cap \{0\} = \emptyset$.
  Donc $\mathbb{N} \oplus 1 = Card(\mathbb{N}^* \cup \{0\}) = Card(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$
- $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N} = \mathbb{N}$:
  $\mathbb{N}$ est équipotent à P (ensemble des entiers pairs) par la bijection $f : n \mapsto 2n$ et à I (ensemble des entiers impairs) par la bijection $g : n \mapsto 2n + 1$; or $P \cap I = \emptyset$, donc $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N} = Card(P \cup I) = Card(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.
- $\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n \oplus p = n + p$:
  $p = \{0, 1, ..., p - 1\}$ est équipotent à $\{n, n+1, ..., n+p-1\}$ qui est disjoint de $\{0, 1, ..., n-1\} = n$; donc

$$\begin{aligned} n \oplus p &= Card(\{0, 1, ..., n-1\} \cup \{n, n+1, ..., n+p-1\}) \\ &= Card(\{0, 1, ..., n+p-1\}) \\ &= n + p \end{aligned}$$

N.B. En fait, tout cardinal infini α vérifie $\alpha \oplus \alpha = \alpha$ (même démonstration que pour $\mathbb{N}$: on construit par récurrence transfini une bijection de α sur les ordinaux "pairs" de α et sur les ordinaux "impairs" de α ; puis on combine ces deux bijection pour obtenir une bijection de $\alpha \oplus \alpha$ sur α). Ceci a pour conséquence que si deux cardinaux α et β sont tels que l'un au moins des deux est infini, alors $\alpha \oplus \beta = \max(\alpha, \beta)$. (on utilise pour cela les propriétés 3 et 6 qui suivent).

Application : Si $Card(\mathrm{E}) = n$, alors $Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E})) = 2^n$.

Démonstration : Par récurrence sur n.

- Si $n = 0$, la propriété est immédiate.
- Supposons la propriété vraie pour n ; soit E un ensemble de cardinal $n+1$. Alors $\mathrm{E} \neq \emptyset$, soit donc $a \in \mathrm{E}$.
  Soit $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}\setminus\{a\}$: on a $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \cup \{a\}$ et $\mathrm{E}_1 \cap \{a\} = \emptyset$ donc $Card(\mathrm{E}) = Card(\mathrm{E}_1) \oplus Card(\{a\})$ donc $n+1 = Card(\mathrm{E}_1) + 1$ donc $Card(\mathrm{E}_1) = n$.
  Soit $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}(\mathrm{E})\setminus\mathfrak{P}(\mathrm{E}_1)$. $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des parties de E qui contiennent l'élément a :
  $\mathfrak{P}(\mathrm{E}) = \mathfrak{P}(\mathrm{E}_1) \cup \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{P}(\mathrm{E}_1) \cap \mathfrak{F} = \emptyset$; donc
  $$Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E})) = Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E}_1)) \oplus Card(\mathfrak{F})$$
  On a $Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E}_1) = 2^n$ (hypothèse de récurrence) ; de plus, $\mathfrak{P}(\mathrm{E}_1)$ et $\mathfrak{F}$ sont équipotents par la bijection :
  $$f : \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{P}(\mathrm{E}_1) \to \mathfrak{F} \\ \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A} \cup \{a\} \end{array} \right.$$
  Donc $Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E})) = Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E}_1)) \oplus Card(\mathfrak{P}(\mathrm{E}_1)) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

On conclue par récurrence.

□

2.2 Propriétés de la somme cardinale

1. $\underline{\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha}$ (commutativité)
   Soient A et B tels que $\alpha = Card(\mathrm{A})$, $\beta = Card(\mathrm{B})$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.
   Alors $\alpha \oplus \beta = Card(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = Card(\mathrm{B} \cup \mathrm{A}) = \beta \oplus \alpha$.
2. $\underline{(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)}$ (associativité)
   Soient A, B et C tels que $\alpha = Card(\mathrm{A})$, $\beta = Card(\mathrm{B})$ et $\gamma = Card(\mathrm{C})$; soient $\mathrm{A}' = \mathrm{A} \times \{0\}$, $\mathrm{B}' = \mathrm{B} \times \{1\}$, $\mathrm{C}' = \mathrm{C} \times \{2\}$.
   Alors $\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}' = \mathrm{B}' \cap \mathrm{C}' = \mathrm{C}' \cap \mathrm{A}' = \emptyset$. Et l'on a
   $$\begin{aligned} (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma &= Card(\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}') \oplus Card(\mathrm{C}') \\ &= Card((\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}') \cup \mathrm{C}') \\ &= Card(\mathrm{A}' \cup (\mathrm{B}' \cup \mathrm{C}')) \\ &= Card(\mathrm{A}') \oplus Card(\mathrm{B}' \cup \mathrm{C}') \\ &= \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) \end{aligned}$$
3. $\underline{\alpha \oplus 0 = \alpha}$
   Soit A tel que $\alpha = Card(\mathrm{A})$.
   Alors $\alpha = Card(\mathrm{A}) = Card(\mathrm{A} \cup \emptyset) = \alpha \oplus 0$.
4. $\underline{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \oplus \gamma = \beta \oplus \gamma}$
   Si $\alpha = \beta = Card(\mathrm{A})$ et $\gamma = Card(\mathrm{C})$, avec $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \emptyset$, alors
   $$\alpha \oplus \gamma = Card(\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = \beta \oplus \gamma$$
   N.B. La réciproque est fausse : $1 \oplus \mathbb{N} = \mathbb{N} = 0 \oplus \mathbb{N}$, et $0 \neq 1$.

5. $\underline{\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \oplus \gamma \leq \beta \oplus \gamma}$
   Soient A, B et C tels que $\alpha = Card(\mathrm{A})$, $\beta = Card(\mathrm{B})$ et $\gamma = Card(\mathrm{C})$ avec $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \emptyset$.
   On a une injection f de A dans B, que l'on prolonge en une injection g de $\mathrm{A} \cup \mathrm{C}$ dans $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ par :
   $$g : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathrm{A} \\ x \text{ si } x \in \mathrm{C} \end{cases}$$
   Il vient $Card(\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \leq Card(\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$, et donc $\alpha \oplus \gamma \leq \beta \oplus \gamma$.
6. $\underline{\alpha \leq \beta \iff \exists \gamma, \quad \beta = \alpha \oplus \gamma}$
   $\boxed{\Rightarrow}$ En notant comme usuellement $\beta \backslash \alpha = \{x \in \beta \,/\, x \notin \alpha\}$, on a :
   $\beta = \alpha \cup (\beta \backslash \alpha)$ et $\alpha \cap (\beta \backslash \alpha) = \emptyset$, donc $Card(\beta) = Card(\alpha) \oplus Card(\beta \backslash \alpha)$.
   Le cardinal $\gamma = Card(\beta \backslash \alpha)$ convient donc.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Soient A et C tels que $\alpha = Card(\mathrm{A})$, $\gamma = Card(\mathrm{C})$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \emptyset$.
   alors $\beta = Card(\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$; et d'après l'injection canonique de A dans $\mathrm{A} \cup \mathrm{C}$, on a $\alpha \leq \beta$.
7. $\underline{Card(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \oplus Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = Card(\mathrm{A}) \oplus Card(\mathrm{B})}$
   $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = (\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \backslash \mathrm{A})$, et cette union est disjointe, donc
   $Card(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = Card(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \oplus Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \oplus Card(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A})$
   D'autre part $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \emptyset$, donc
   $$Card(\mathrm{A}) = Card(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \oplus Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$
   De même $$Card(\mathrm{B}) = Card(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}) \oplus Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$
   On obtient en sommant ces deux expressions :
   $$\begin{aligned} & Card(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \oplus Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \oplus Card(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}) \oplus Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \\ = \; & Card(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \oplus Card(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \end{aligned}$$

3 Produit de deux cardinaux

3.1 Définition du produit cardinal

Théorème 3.1 *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}$ *et* B_1 *des ensembles tels que* A *et* A_1 *sont équipotents, ainsi que* B *et* B_1*. Alors les produits cartésiens* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *et* $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{B}_1$ *sont équipotents.*

Démonstration : Soient $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_1$ et $g : \mathrm{B} \to \mathrm{B}_1$ des bijections.

Alors l'application :
$$\mathrm{F} : \begin{cases} \mathrm{A} \times \mathrm{B} \to \mathrm{A}_1 \times \mathrm{B}_1 \\ (x, y) \mapsto (f(x), g(y)) \end{cases}$$
est encore une bijection, et donc les ensembles $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{B}_1$ sont également équipotents.

$\square$

Ceci légitime la définition suivante :

Définition Soient α et β deux cardinaux. Soient A et B des ensembles tels que $\alpha = Card(\mathrm{A})$ et $\beta = Card(\mathrm{B})$. Le *produit* $\alpha \otimes \beta$ est alors $Card(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$.

EXEMPLES :

- $\forall n, p \in \mathbb{N} : n \otimes p = np$ (la multiplication cardinale coïncide avec la multiplication usuelle sur les entiers)
  La propriété est vraie si $n = 0$ ou $p = 0$.
  Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \otimes p = Card(\{0, 1, ..., n-1\} \times \{0, 1, ..., p-1\})$; et $np = \{0, 1, ..., np-1\}$. Soit f l'application à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur le produit cartésien $\{0, 1, ..., n-1\} \times \{0, 1, ..., p-1\}$ par :
  $$f((i, j)) = ip + j \text{ (avec } 0 \leq i \leq n-1 \text{ et } 0 \leq j \leq p-1)$$
  On a $0 \leq ip + j \leq p(n-1) + p - 1 = np - 1$ donc f est à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, ..., np-1\}$; montrons que f est une bijection du produit $\{0, 1, ..., n-1\} \times \{0, 1, ..., p-1\}$ sur $\{0, 1, ..., np-1\}$.
  Soit $k \in \{0, 1, ...np-1\}$. Si k a un antécédent (i, j), on a $k = ip + j$ avec $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq p-1$. Donc i et j sont respectivement quotient et reste dans la division euclidienne de k par p. D'où l'unicité de l'antécédent (i, j). Réciproquement, si i et j sont ainsi définis, on a : $k = ip + j$ et $0 \leq j \leq p-1$; enfin si $i \geq n$, alors $ip + j \geq np$, ce qui est absurde ; donc $0 \leq i \leq n-1$ et ce couple (i, j) est bien un antécédent de k.
- $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N} = \mathbb{N}$
  En effet $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N} = Card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

N.B. Tout comme pour la somme cardinale, on vérifie que pour tout cardinal infini α, on a $\alpha \otimes \alpha = \alpha$. Et, par conséquent, si deux cardinaux α et β (non nuls) sont tels que l'un au moins des deux est infini, alors $\alpha \otimes \beta = \max(\alpha, \beta)$ (grâce aux propriétés 1, 3 et 8 qui suivent).

3.2 Propriétés du produit cardinal

1. $\underline{\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha}$
   Soit $\alpha = Card(\mathrm{A})$ et $\beta = Card(\mathrm{B})$; soit f l'application de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ dans $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$, $f : (x, y) \mapsto (y, x)$.Alors f est bien bijective.
2. $\underline{(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)}$
   Avec les mêmes notations, l'application $f : (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C} \to \mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C})$, $f : ((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$ est bijective.
3. $\underline{\alpha \otimes 1 = \alpha}$
   Soit $\alpha = Card(\mathrm{A})$; $1 = \{0\}$ donc $\alpha \otimes 1 = Card(\mathrm{A} \times \{0\})$; et l'application $f : \mathrm{A} \times \{0\} \to \mathrm{A}, \quad (x, 0) \mapsto x$ est bijective.
4. $\underline{\alpha \otimes 0 = 0}$
   Si $\alpha = Card(\mathrm{A})$, alors $\alpha \otimes 0 = Card(\mathrm{A} \times \emptyset) = Card(\emptyset) = 0$.
5. $\underline{(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\alpha \otimes \gamma)}$
   Soient A, B et C tels que $\alpha = Card(\mathrm{A}), \beta = Card(\mathrm{B}), \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$ et $\gamma = Card(\mathrm{C})$.
   $(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = Card((\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \times \mathrm{C})$; or $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \times \mathrm{C} = (\mathrm{A} \times \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \times \mathrm{C})$ et $(\mathrm{A} \times \mathrm{C}) \cap (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = \emptyset$. Il vient

$$Card((\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \times \mathrm{C}) = Card(\mathrm{A} \times \mathrm{C}) \oplus Card(\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\beta \otimes \gamma)$$

6. $\underline{\alpha \otimes \beta = 0 \iff [\alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0]}$
   Soit A tel que $\alpha = Card(\mathrm{A})$, B tel que $\beta = Card(\mathrm{B})$. On a

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta = 0 &\iff Card(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \emptyset \\ &\iff \mathrm{A} \times \mathrm{B} = \emptyset \\ &\iff [\mathrm{A} = \emptyset \text{ ou } \mathrm{B} = \emptyset] \\ &\iff [\alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0] \end{aligned}$$

7. $\underline{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \otimes \gamma = \beta \otimes \gamma}$
   Soient A et C tels que $\alpha = \beta = Card(\mathrm{A})$ et $\gamma = Card(\mathrm{C})$.

   Alors $$\alpha \otimes \gamma = Card(\mathrm{A} \times \mathrm{C}) = \beta \otimes \gamma$$

   N.B. La réciproque est fausse, même avec $\gamma \neq 0$:
   $1 \otimes \mathbb{N} = Card(\{0\} \times \mathbb{N}) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N} = \mathbb{N}$ (propriété vue plus haut).
8. $\underline{\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \otimes \gamma \leq \beta \otimes \gamma}$
   Soient A, B et C tels que $\alpha = Card(\mathrm{A}), \beta = Card(\mathrm{B})$ et $\gamma = Card(\mathrm{C})$. Soit f une injection de A dans B. Alors f induit une injection g de $\mathrm{A} \times \mathrm{C}$ dans $\mathrm{B} \times \mathrm{C}$ (par $g(x, y) = (f(x), y)$) et donc $\alpha \otimes \gamma \leq \beta \otimes \gamma$.

Annexe

Lemme : *Soit* A *une partie d'un ordinal* ω. *Alors l'ordinal de l'ensemble* A *muni de la relation d'appartenance est inférieur ou égal à* ω.

Démonstration : Nous allons montrer ceci par récurrence sur l'ordinal ω. Soit donc ω un ordinal. Supposons le résultat démontré pour tout ordinal $\alpha \prec \omega$. Deux cas se présentent : ω est un ordinal successeur ou ω est un ordinal limite.

Si ω est un ordinal successeur, alors $\omega = \alpha \cup \{\alpha\}$ pour un ordinal α donné. Soit donc A une partie de ω. Si $\mathrm{A} \subset \alpha$, alors l'ordinal de A est inférieur ou égal à α, donc à ω. Sinon, on définit $\mathrm{B} = \mathrm{A} \backslash \{\alpha\}$. Alors l'ordinal γ de B est inférieur ou égal à α, et l'on a un isomorphisme f de B sur γ. On prolonge alors f à A en posant $f(\alpha) = \gamma$, et l'on obtient un isomorphisme de A sur $\gamma \cup \{\gamma\} \leq \alpha \cup \{\alpha\} = \omega$.

Si ω est un ordinal limite, alors $\omega = \bigcup_{\alpha \prec \omega} \alpha$. Soit A une partie de ω. Alors $\mathrm{A} = \bigcup_{\alpha \prec \omega} \alpha \cap \mathrm{A}$.

Or, pour tout ordinal $\alpha \prec \omega$, il existe par l'hypothèse de récurrence un isomorphisme f_α de $\alpha \cap \mathrm{A}$ sur un ordinal $\alpha_1 \leq \alpha$.

En fait, tous ces isomorphismes sont alors compatibles, et leur réunion définit donc un isomorphisme de A sur l'union des images. Soient en effet α et β deux ordinaux inférieurs à ω, avec par exemple $\alpha \leq \beta$. Alors la restriction de f_β à $\mathrm{A} \cap \alpha$ est un isomorphisme de $\mathrm{A} \cap \alpha$ sur son image.

Et $f_\beta(\mathrm{A} \cap \alpha)$ est un ordinal : c'est bien sûr un ensemble bien ordonné par la relation d'appartenance, en tant que sous ensemble de β_1. Reste à montrer la propriété $x \in f_\beta(\mathrm{A} \cap \alpha) \Longrightarrow x \subset f_\beta(\mathrm{A} \cap \alpha)$. Soit donc $x \in f_\beta(\mathrm{A} \cap \alpha)$ et $y \in x$. Comme $f_\beta(\mathrm{A} \cap \beta)$ est un ordinal contenant $f_\beta(\mathrm{A} \cap \alpha)$, on a l'appartenance $x \in f_\beta(\mathrm{A} \cap \beta)$, donc $x \subset f_\beta(\mathrm{A} \cap \beta)$, c'est-à-dire que $y \in f_\beta(\mathrm{A} \cap \beta)$.

Mais alors $y \in x$ implique $f_\beta^{-1}(y) \in f_\beta^{-1}(x)$, puisque f_β est un isomorphisme d'ensembles bien ordonnés par l'appartenance. En particulier, comme $f_\beta^{-1}(x) \in \alpha$, on a nécessairement $f_\beta^{-1}(y) \in \alpha$, et donc $y \in f_\beta(\mathrm{A} \cap \alpha)$. On a ainsi montré que $x \subset f_\beta(\mathrm{A} \cap \alpha)$, et donc l'ensemble $f_\beta(\mathrm{A} \cap \alpha)$ est un ordinal.

La restriction de f_β à $\mathrm{A}\cap\alpha$ est un isomorphisme de $\mathrm{A}\cap\alpha$ sur un ordinal, c'est donc f_α, ce qui montre que ces isomorphismes sont bien compatibles. On peut alors définir l'union de tous ces isomorphismes en posant, pour tout élément x de A, $f(x) = f_\alpha(x)$, où α est un ordinal quelconque inférieur à ω tel que $x \in \alpha$. La fonction f ainsi définie est alors un isomorphisme de A sur l'union des ordinaux images, c'est-à-dire sur un ordinal, inférieur ou égal à ω, puisque tous les ordinaux dont on fait l'union le sont par hypothèse de récurrence.

$\square$

Références

[1] J.-L. Krivine, *Théorie des ensembles*, Cassini, 1998.