Argument d'un nombre complexe

Dans ce chapître, nous allons introduire les éléments indispensables à la résolution de notre grand problème : montrer la clôture algébrique de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire le fait que toute équation du type $\mathrm{P}(x) = 0$ (avec P un polynôme quelconque à coefficients complexes) a des solutions dans $\mathbb{C}$. Ainsi sont introduits les nombres e et π, ainsi que la notion d'argument d'un complexe non nul.

Signalons aussi que les notions que nous introduisons ici ont, outre l'intérêt *algébrique* de servir à la démonstration de la clôture algébrique de $\mathbb{C}$, une portée *géométrique* immédiate : en effet, c'est à partir de la notion d'argument que l'on peut donner un fondement théorique à la notion de *mesure d'angle* (à tout angle, on peut associer un complexe non nul bien déterminé, toute mesure de l'angle sera donné par un élément de l'argument de ce complexe).

1 Exponentielle complexe

On considère sur $\mathbb{C}$ la série entière de terme général $a_n z^n$, avec $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{n+1}$ donc $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

D'après le critère de d'Alembert, cette série entière est donc absolument convergente sur $\mathbb{C}$.

Définition On appelle *exponentielle* la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par la série entière de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$. On note $\exp(z)$ sa valeur $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ en z.

(On a en particulier $\exp(0) = 1$.)

D'autre part, on sait qu'une série entière convergente sur $\mathbb{C}$ converge uniformément sur tout disque compact de $\mathbb{C}$; c'est donc le cas pour cette série entière, et donc la fonction exp est *continue* sur tout compact de $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{C}$.

1.1 Propriété fondamentale

Théorème 1.1 $\qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$

Démonstration : La propriété est évidente si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$. Soient donc z_1 et z_2 deux complexes non nuls.

On utilise le résultat général suivant : (produit de Cauchy de séries)

Soient deux séries absolument convergentes de termes généraux u_n et v_n ($n \in \mathbb{N}$) : la série de terme général $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$ est alors absolument convergente, et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n)$.

Appliquant ceci aux séries $\exp(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}$ et $\exp(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$, séries absolument convergentes sur $\mathbb{C}$, on obtient

$$\begin{aligned}\exp(z_1)\exp(z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{z_2^k}{k!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z_1^{n-k} z_2^k\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = \exp(z_1+z_2)\end{aligned}$$

□

Conséquences

- Par récurrence sur $p \in \mathrm{N}^*$, on a pour tous complexes $z_1, \ldots, z_p$:
$$\exp\left(\sum_{k=1}^{p} z_k\right) = \prod_{k=1}^{p} \exp(z_k)$$
- Pour tout complexe z, on a $\exp(-z).\exp(z) = \exp(0) = 1$. En particulier $\exp(z)$ est non nul, et $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.
- Pour z_1 et z_2 deux complexes, on a $\exp(z_1 - z_2) = \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)}$.

1.2 Dérivabilité de exp sur $\mathbb{C}$

Théorème 1.2 exp *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$, *et* $\exp' = \exp$.

Démonstration :

- Dérivabilité en 0 :
  Soit pour $h \in \mathbb{C}^*$:
$$\varphi(h) = \frac{\exp(h) - 1}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}$$
  φ est donc la restriction à $\mathbb{C}^*$ de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{C}$ tout entier par $\varphi_1(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}$. La somme de cette série entière convergeant sur $\mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{C}$ donc en 0. En particulier φ admet une limite en 0 :
$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \varphi_1(0) = 1$$
  c'est-à-dire que exp est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$.
- Dérivabilité en $z \in \mathbb{C}^*$:
  Soit z un complexe non nul et φ_z la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par
$$\varphi_z(h) = \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h}$$
  On a $$\varphi_z(h) = \exp(z) \times \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(z)\varphi(h)$$
  donc $\lim_{h\to 0} \varphi_z(h) = \exp(z)$, d'où le résultat annoncé. □

1.3 Restriction à $\mathbb{R}$

D'après la définition de exp comme somme de série, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \exp(x) \geq 1$$

Comme pour $x \in \mathbb{R}_-$, on a $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$, on obtient que la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, la fonction exp étant dérivable sur $\mathbb{C}$, il en va de même pour sa restriction à $\mathbb{R}$, qui vérifie $(\exp_{\restriction\mathbb{R}})' = \exp_{\restriction\mathbb{R}}$. On en déduit aisément les propriété classiques de croissance, de convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle...

1.4 Notation e^z

On déduit de la propriété fondamentale, par récurrence sur $n \in \mathrm{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [\exp(z)]^n = \exp(nz)$$

(propriété encore vraie pour $n = 0$). Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on a encore :

$$\exp(nz) = \frac{1}{\exp(-nz)} = \frac{1}{[\exp(z)]^{-n}} = [\exp(z)]^n$$

donc finalement $\qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad [\exp(z)]^n = \exp(nz)$

<u>Notation :</u> On note e le complexe $\exp(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ $(\simeq 2,718...)$

On peut donc écrire (pour $z = 1$) :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(n) = e^n$$

Ensuite, pour $q \in \mathbb{N}^*$, on a $[\exp(\dfrac{1}{q})]^q = \exp(q \times \dfrac{1}{q}) = e$ donc $\exp(\dfrac{1}{q}) = e^{\frac{1}{q}}$. Il vient, pour p et q entiers, $\exp(\dfrac{p}{q}) = \exp(p \times \dfrac{1}{q}) = [\exp(\dfrac{1}{q})]^p = [e^{\frac{1}{q}}]^p = e^{\frac{p}{q}}$.

C'est-à-dire $\qquad \forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exp(r) = e^r$

<u>Notation :</u> Par extension à l'ensemble des nombres complexes, on convient de noter e^z le complexe $\exp(z)$. La propriété fondamentale s'écrit alors :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

propriété qui étend une propriété classique des puissances et justifie ainsi encore une fois notre notation...

2 Sinus et cosinus

2.1 Fonctions sin et cos

Définition On définit en tout complexe z les fonctions :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propriétés

1. Pour tout complexe z, on a $\cos(-z) = \cos z$ et $\sin(-z) = -\sin z$.

2. Soient z_1 et z_2 deux complexes. Alors

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

En effet, en développant le membre de droite $\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i} \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^{iz_1}e^{iz_2} + 2e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \cos(z_1+z_2)
\end{aligned}$$

3. On a également $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ (même principe.)
4. Pour tout complexe z, on a :

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \quad \text{et} \quad \sin 2z = 2\sin z \cos z$$

(cas particulier des propriétés précédentes, en prenant $z_1 = z_2 = z$.)

5. Pour tout complexe z :

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

En effet $\sin^2 z + \cos^2 z = \frac{1}{4}[-(e^{iz}-e^{-iz})^2 + (e^{iz}+e^{-iz})^2] = \frac{4}{4} = 1$.

6. Pour tout complexe z, on a $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
7. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables, et l'on a

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos$$

Développements de $\sin z$ et $\cos z$ en série entière :

1. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

En effet $$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(i^n + (-i)^n\right) z^n$$

Lorsque n est impair, on a $i^n + (-i)^n = 0$. Lorsque n est pair ($n = 2p$), on a $i^n + (-i)^n = (-1)^p + (-1)^p = 2(-1)^p$.

On obtient $$\cos z = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!}(-1)^p z^{2p}$$

2. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ (même principe.)

N.B. Lorsque z est réel, on a $\cos z = \mathfrak{Re}\left(e^{iz}\right)$ et $\sin z = \mathfrak{Im}\left(e^{iz}\right)$.

En effet, les développement en série entière des fonctions sinus et cosinus, montrent notamment que pour z réel, on a $\cos z$ et $\sin z$ réels également. Comme on sait que $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, on obtient le résultat voulu par unicité des parties réelles et imaginaires de e^{iz}.

N.B. Ces définitions étendent à $\mathbb{C}$ les notions habituelles (géométriques) de sinus et cosinus. En effet, pour z réel, le complexe e^{iz} est de module 1 :

$$\left|e^{iz}\right| = \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1$$

Le cosinus de z est donc la partie réelle de e^{iz}, point du cercle trigonométrique.

2.2 Périodicité des fonctions sin et cos

Lemme 2.1 *L'équation* $\cos x = 0$ *admet une unique solution dans* $[\,0\,;2\,]$.

Démonstration :

- *Existence d'une solution sur* $[\,0\,;2\,]$ *:*
  On sait que $\cos 0 = 1 > 0$. D'autre part :
  $$\begin{aligned}\cos 2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - 2 + \frac{2}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} \\ &= -\frac{1}{3} + \sum_{p=1}^{\infty} -\frac{2^{4p+2}}{(4p+2)!}\left(1 - \frac{4}{(4p+3)(4p+4)}\right)\end{aligned}$$
  Cette dernière somme à tous ses termes négatifs, et donc $\cos 2 < -\dfrac{1}{3}$.
  Par continuité de la fonction cosinus (et par le théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $\cos x = 0$ admet au moins une solution dans $[\,0\,;2\,]$.
- *Unicité de la solution :*
  Supposons que l'on ait deux réels x_1 et x_2 vérifiant $0 < x_1 < x_2 < 2$ et $\cos x_1 = \cos x_2 = 0$.
  Alors $\sin(x_2 - x_1) = \sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2 = 0$.
  D'autre part, pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;\sqrt{6}\,[$, on a
  $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4p+2)(4p+3)}\right)$$
  On reconnaît dans cette dernière expression une série à termes strictement positifs (car $x^2 < 6$ sur l'intervalle considéré, donc le premier terme est positif, et donc les autres aussi...) Et donc pour tout $x \in\,]\,0\,;\sqrt{6}\,[$, on a bien $\sin x > 0$.
  En particulier la valeur $\sin(x_2 - x_1) = 0$ est absurde, puisque l'on a supposé $0 < x_2 - x_1 < 2 < \sqrt{6}$. □

Définition On note $\dfrac{\pi}{2}$ l'unique solution de l'équation $\cos x = 0$ sur $[\,0\,;2\,]$.

N.B. On montre sans trop de problèmes que $\dfrac{\pi}{2} > \sqrt{2}$. En effet, la fonction cos est strictement positive sur $\left[\,0\,;\sqrt{2}\,\right]$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{4p}}{(4p)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4p+1)(4p+2)}\right)$$

Et, pour $x \leq \sqrt{2}$, le rapport $\dfrac{x^2}{(4p+1)(4p+2)}$ est inférieur à 1 pour tout entier naturel p, strictement pour $p > 0$. Par sommation, il vient $\cos x > 0$ sur l'intervalle $\left[\,0\,;\sqrt{2}\,\right]$. La solution $\dfrac{\pi}{2}$ de l'équation $\cos x = 0$ est donc nécessairement sur l'intervalle $\left]\,\sqrt{2}\,;2\,\right[$.

Théorème 2.2 *La fonction exponentielle est $2i\pi$-périodique sur $\mathbb{C}$, les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques.*

Démonstration : On a en effet $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. De la relation $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, on tire $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ ou -1. Comme la fonction sin est positive sur $\left]\,0\,;\sqrt{6}\,\right[$, qui contient $\dfrac{\pi}{2}$, on a $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

et donc $$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

Il vient $$e^{2i\pi} = i^4 = 1$$

Et donc, pour tout complexe z, $e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi} = e^z$, c'est-à-dire que la fonction exp est $2i\pi$-périodique sur $\mathbb{C}$. On en déduit, pour z un complexe, que

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{iz+2i\pi} + e^{-iz-2i\pi}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

et donc la fonction cos est 2π-périodique sur $\mathbb{C}$. De même pour la fonction sin.

□

N.B. Si l'on revient à $\mathbb{R}$, nous avons montré en particulier que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Attention : nous n'avons pas montré que 2π est *la* période de ces fonctions. On peut juste dire que 2π est un multiple de la période...

Propriété 2.3 *Les solutions de l'équation $e^z = 1$ sont les multiples de $2i\pi$.*

Démonstration : En effet, soit $z = a + ib$ un complexe tel que $e^z = 1$. Alors $|e^z| = |e^a|\,\left|e^{ib}\right|$. Comme on e^{ib} s'écrit $\cos b + i\sin b$, avec $\cos b$ et $\sin b$ réels, on a

$$\left|e^{ib}\right| = \sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$$

donc $$|e^z| = e^a$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la seule solution de $e^a = 1$ est $a = 0$. Donc z est imaginaire pur. Effectuant la division euclidienne de b par 2π, on peut écrire b sous la forme $b = 2n\pi + u$, avec $u \in [\,0\,;2\pi\,[$.

Alors $$e^z = e^{2in\pi + iu} = e^{iu}$$

Écrivant $e^{iu} = \left(e^{\frac{iu}{4}}\right)^4$, on pose $v = \cos\dfrac{u}{4}$ et $w = \sin\dfrac{u}{4}$ et l'on a :

$$1 = e^{iu} = (v+iw)^4 = v^4 - 6v^2w^2 + w^4 + 4ivw(v^2 - w^2)$$

Par identification, on a nécessairement $4vw(v^2 - w^2) = 0$. Or $0 \leq \dfrac{u}{4} < \dfrac{\pi}{2}$, donc on a $v = \cos\dfrac{u}{4} > 0$. Il vient $w = 0$ ou $v^2 - w^2 = 0$. Cette seconde possibilité nous amène, en considérant cette fois la partie réelle, à l'équation $1 = -4v^4$, qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc $w = 0$, c'est-à-dire

$$\sin\frac{u}{4} = 0$$

Enfin la fonction sinus est, on l'a vu, strictement positive sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Comme on a $\frac{u}{4}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on obtient nécessairement $\frac{u}{4}=0$, et donc

$$z = 2in\pi \qquad \square$$

N.B. De ceci, on tire que la période de la fonction cosinus est exactement 2π : la période T de la fonction cosinus doit en effet vérifier en particulier $\cos \mathrm{T} = \cos 0 = 1$.

Et donc $$e^{i\mathrm{T}} + e^{-i\mathrm{T}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \left(e^{i\mathrm{T}} - 1\right)^2 = 0$$

On obtient $e^{i\mathrm{T}} = 1$, donc T est multiple de 2π d'après ce qui précède. On a déjà vu que 2π est une période de la fonction cosinus. On obtient la même chose pour la fonction sinus par l'équation $\sin(\pi/2 + \mathrm{T}) = \sin \pi/2$.

3 Écriture exponentielle d'un complexe

3.1 Complexes de module 1

Un complexe Z est de module 1 si et seulement si ses parties réelles et imaginaires a et b vérifient $a^2 + b^2 = 1$. En particulier, les réels a et b sont nécessairement dans l'intervalle $[-1\,;1]$.

Théorème 3.1 *Pour tout complexe* Z *de module* 1*, il existe un unique réel x de $]-\pi\,;\pi]$ tel que $\mathrm{Z} = e^{ix}$. Les solutions de l'équation $e^z = \mathrm{Z}$ sont alors :*

$$\{ix + 2in\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration : La seconde partie du résultat est immédiate : si z_0 est un complexe vérifiant $e^{z_0} = \mathrm{Z}$, alors l'équation $e^z = \mathrm{Z}$ se ramène à

$$e^{z-z_0} = 1$$

et donc le complexe $z - z_0$ est de la forme $2in\pi$. Réciproquement, tous les complexes $z_0 + 2in\pi$, avec $n \in \mathbb{Z}$, sont solutions. Ceci prouve au passage l'unicité de x sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Soit donc $\mathrm{Z} = a + ib$ un complexe de module 1.

- *Premier cas :* $a \geq 0, \quad b \geq 0$
  La fonction cosinus, dérivée de la fonction sinus, étant strictement positive sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc réalise une bijection croissante de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0\,;1]$ (en effet $\sin 0 = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$). Donc il existe un unique réel $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = b$. D'autre part, on a alors :

  $$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - b^2} = |a| = a$$

  Et comme le réel x est dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, il vérifie $\cos x \geq 0$, et donc $\cos x = a$. On a donc un réel x tel que :

  $$\cos x = a \quad \text{et} \quad \sin x = b$$

  donc $$e^{ix} = \cos x + i \sin x = \mathrm{Z}$$

– *Deuxième cas :* $a \geq 0, \quad b < 0$
On se ramène au premier cas en considérant le complexe conjugué $\overline{\mathrm{Z}}$. On a un réel x de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\overline{\mathrm{Z}} = e^{ix}$. Alors $\mathrm{Z} = e^{-ix}$, donc le réel $-x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ convient.

– *Troisième cas :* $a < 0$
On se ramène à l'un des cas précédents en considérant le complexe $-\mathrm{Z}$. Soit x un réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $-\mathrm{Z} = e^{ix}$.
Alors $\mathrm{Z} = -e^{ix} = e^{i\pi+ix} = e^{-i\pi+ix}$. Le réel $x+\pi$ convient (ou $x-\pi$, selon les cas, pour avoir une valeur dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$).

□

3.2 Argument d'un complexe

Soit z un complexe non nul. On a $\left(\frac{\mathfrak{Re}(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Im}(z)}{|z|}\right)^2 = 1$, c'est-à-dire que le complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1. Donc le système en $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathfrak{Re}(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{\mathfrak{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

admet un ensemble de solutions infini, de la forme $\{x + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\}$.

Définition L'ensemble de ces solutions, noté $\arg z$, s'appelle *argument* du complexe z ; l'unique nombre $\varphi \in \arg z$ qui vérifie $\varphi \in\,]-\pi\,;\pi]$ est noté $\mathrm{A}rg\ z$ et s'appelle *argument principal* de z.

Si $\theta \in \arg z$, on a $\mathfrak{R}(z) = |z|\cos\theta$ et $\mathfrak{Im}(z) = |z|\sin\theta$, c'est-à-dire :

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,e^{i\theta}$$

Définition On appelle *écriture exponentielle* du complexe z sa représentation par une expression de la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel positif (*i.e.* $r = |z|$).

3.3 Retour sur la fonction exponentielle

<u>NOTATION :</u> Soit $\left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, +\right)$ le groupe quotient du groupe $(\mathbb{R}, +)$ par la relation d'équivalence de congruence modulo 2π : pour tout réel ϑ, on note $\overline{\vartheta} = \{\vartheta + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sa classe d'équivalence.
<u>NOTATION :</u> On note $\mathfrak{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 ; $(\mathfrak{U}, \times)$ est alors un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Propriété 3.2 *Pour tout réel θ, on a $e^{i\theta} \in \mathfrak{U}$. Et si θ et θ' sont deux réels dans la même classe d'équivalence, alors $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.*

Démonstration : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ donc $e^{i\theta}$ est de module 1, c'est-à-dire dans $\mathfrak{U}$. Pour le deuxième point, dire que θ et θ' sont deux réels dans la même classe d'équivalence, c'est dire qu'il existe un entier n tel que $\theta' = \theta + 2n\pi$.

Alors $$e^{i\theta'} = e^{i\theta} \cdot e^{2in\pi} = e^{i\theta}$$ $\square$

Ceci permet de définir un application de $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ dans $\mathfrak{U}$:

$$f : \overline{\vartheta} \longmapsto e^{i\vartheta}$$

En effet, la propriété précédente nous dit exactement que cette application est bien définie (la valeur de $e^{i\vartheta}$ ne dépend pas du représentant ϑ choisi), et que la fonction est bien à valeurs dans l'ensemble $\mathfrak{U}$ des complexes de module 1.

Théorème 3.3 *f réalise un isomorphisme de groupe de $\left(\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, +\right)$ sur $(\mathfrak{U}, \times)$.*

Démonstration : On a déjà vu que l'application f est bien définie. On a bien, pour tous $\overline{\theta_1}$ et $\overline{\theta_2}$ éléments de $\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} f\left(\overline{\theta_1} + \overline{\theta_2}\right) &= f\left(\overline{\theta_1 + \theta_2}\right) \qquad \text{(structure de groupe de } \tfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\text{)} \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{(définition de } f\text{)} \\ &= e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} \\ &= f\left(\overline{\theta_1}\right) \times f\left(\overline{\theta_2}\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est bien un morphisme de groupes. La surjectivité découle immédiatement du théorème 3.1 : tout complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme e^{ix}, avec x réel. Enfin, la propriété 2.3 nous assure l'injectivité : l'image réciproque par f de 1, élément neutre du groupe d'arrivée $(\mathfrak{U}, \times)$, est exactement la classe $\overline{0}$, élément neutre du groupe $\left(\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, +\right)$.

$\square$

N.B. En particulier, f induit une bijection de $]-\pi\,;\pi]$ sur $\mathfrak{U}$. Sa bijection réciproque n'est autre que la fonction Arg.

Corollaire 3.4 *L'exponentielle est un morphisme surjectif de groupe de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

Démonstration : On a déjà vu (propriété fondamentale de l'exponentielle) que c'est un morphisme de groupes. Pour la surjectivité, on sait déjà que tout complexe de module 1 s'écrit comme une exponentielle.

Soit z un complexe non nul. Alors $|z| > 0$ donc $|z|$ s'écrit sous la forme $e^{\ln|z|}$. Comme le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, il s'écrit sous la forme e^{ix}, avec x réel.

On obtient $$z = e^{\ln|z| + ix}$$ $\square$