Principe de Fermat
Applications à la réflexion et à la réfraction

Jean Gounon

http://dma.ens.fr/culturemath

1 Enoncé du principe de Fermat

Pour aller d'un point-source S à un point-détecteur D après une réflexion ou une réfraction, la lumière suit un chemin pour lequel le temps de parcours est extrêmal (i.e. minimal ou maximal).

Nous allons, à partir de ce principe, démontrer les lois classiques de la réflexion et de la réfraction.

2 Application à la réflexion

2.1 Réflexion sur un miroir-plan

Soient D' le symétrique de D par rapport au plan (P) du miroir et I le point d'intersection de la droite (SD') et du miroir (voir figure 1). Si M est un point quelconque du miroir distinct de I, on a : $SM + MD = SM + MD' > SD' = SI + ID$; d'où un minimum strict pour la longueur du trajet $[SMD]$ (et donc aussi pour le temps de ce trajet) : au point I. Le chemin $[SID]$ est donc un parcours lumineux, et c'est le seul parcours lumineux possible par réflexion sur le miroir.

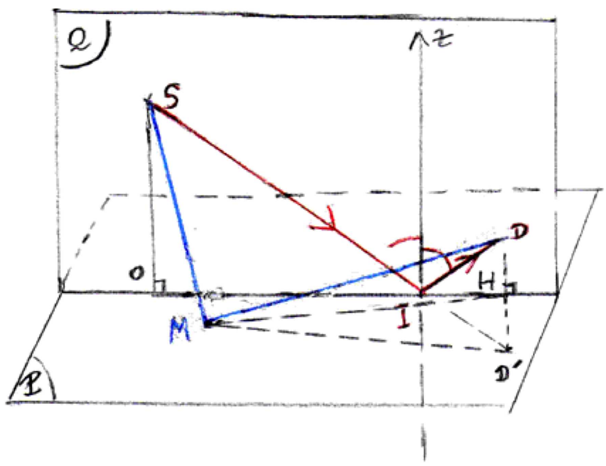

Fig. 1 –

On note O le projeté de S sur le plan (P), H le projeté de D sur ce plan, $(z'Iz)$ la normale en I au plan (P). Alors $\widehat{SIO} = \widehat{D'IH} = \widehat{DIH}$; donc $\widehat{SIz} = \widehat{DIH}$. L'angle $\widehat{SIz}$ est dit *angle d'incidence*, l'angle $\widehat{DIz}$ est dit *angle de réflexion.*

On déduit de ce qui précède la loi de réflexion sur un miroir plan :

1. Le rayon réfléchi est dans le plan (Q) perpendiculaire au plan du miroir contenant le rayon incident
2. Dans ce plan, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

2.2 Généralisation

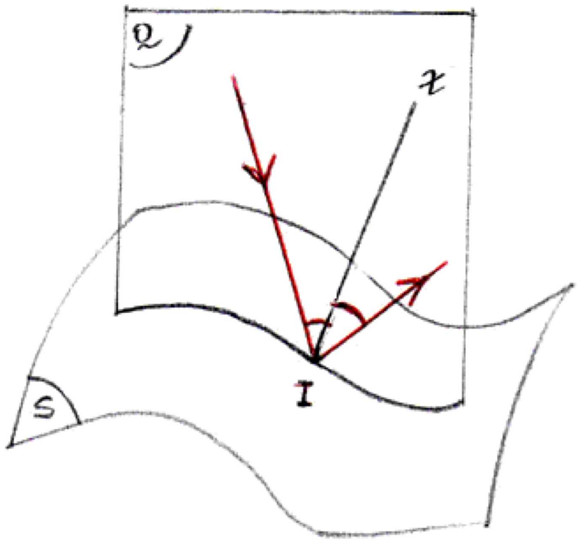

Fig. 2 –

Soit maintenant une surface-miroir quelconque (voir figure 2) ; un rayon lumineux est incident au miroir en I. On peut, en utilisant ce qui précède pour l'appliquer au plan tangent en I à la surface du miroir, généraliser la propriété précédente ainsi ((Iz) désignant la demi-normale en I à la surface, du même côté que le rayon incident, on définit comme ci-dessus l'angle d'incidence et l'angle de réflexion) :

1. Le rayon réfléchi est dans le plan (Q)contenant la normale en I et le rayon incident
2. Dans ce plan, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

2.3 Réflexion sur un miroir sphérique, avec S au centre du miroir.

Les points S et D étant supposés distincts, on suppose que la droite (SD) coupe le miroir en I. D'après le résultat ci-dessus (égalité des angles d'incidence et de réflexion) le seul trajet lumineux possible $[SMD]$ (M étant un point du miroir) est $[SID]$.

Remarque 2.1 *:*
M étant un point quelconque du miroir, soit N le point d'intersection la droite (DM) avec la sphère de centre D passant par I. Deux cas se présentent :

- *Si $S \in [ID]$ (voir figure 3, dans le plan (SMD)) :*

  $$SI + ID = SM + ND > SM + MD$$

  dans ce cas, le trajet lumineux $[SID]$ correspond à un maximum du temps de parcours pour les trajets $[SMD]$.

- *Si $D \in [IS]$ (voir figure 3*bis*, dans le plan $((SMD))$:*

  $$SI + ID = SM + ND < SM + MD$$

  ici le trajet lumineux $[SID]$ correspond à un temps de parcours minimum pour les trajets $[SMD]$.

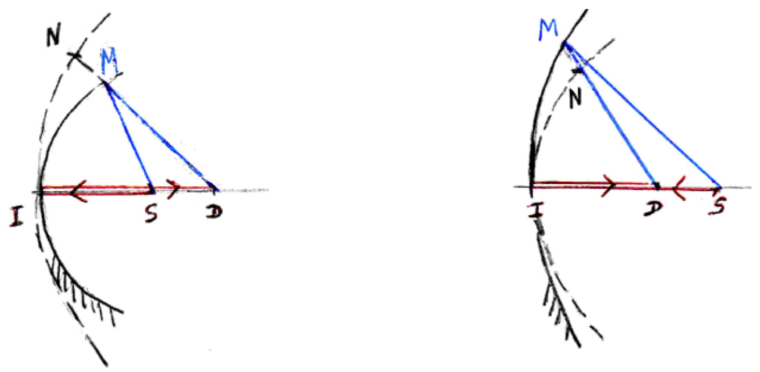

FIG. 3 – 3*bis*

2.4 Réflexion sur un miroir-ellipsoïde, S et D étant aux foyers.

On sait que pour tout point M de l'ellipsoïde, $SM + MD$ est une constante. Ce qui signifie qu'ici *tout* parcours $[SMD]$ est un parcours lumineux.

Remarque 2.2 *En conséquence de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, la tangente à l'ellipse-section de l'ellipsoïde par le plan (SMD) est bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{SMD}$ (voir figure 4, dans le plan (SMD)) : on retrouve par ce biais une propriété classique de la tangente en un point d'une ellipse...*

3 Application à la réfraction : loi de Descartes

On rappelle que, la vitesse de la lumière dans le vide étant notée c, sa vitesse dans un milieu d'indice n est $v = \dfrac{c}{n}$.

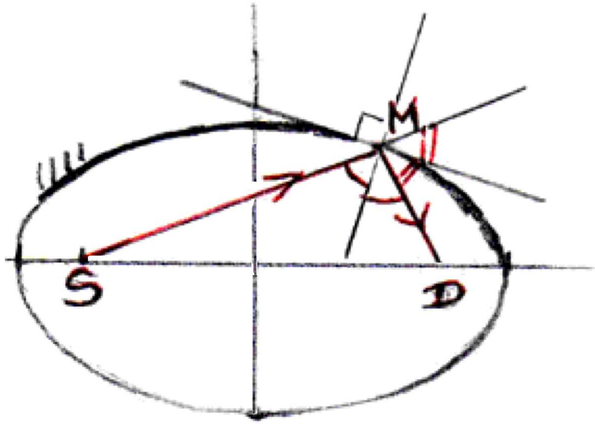

FIG. 4 –

On va considérer ici un plan (P) séparant deux milieux d'indices différents n_1 et n_2. La source S est dans le milieu d'indice n_1, le détecteur D dans celui d'indice n_2.

M étant un point quelconque du plan (P), la lumière parcourant le chemin $[SMD]$ met un temps égal à

$$SM\frac{n_1}{c} + MD\frac{n_2}{c}.$$

Le problème est donc de chercher des points M tels que la somme $n_1 SM + n_2 MD$ soit extrémale.

Considérons le plan (Q) contenant S et D et perpendiculaire à (P). On va d'abord se restreindre à ce plan, et considérer un point M sur la droite (D) d'intersection de (P) et (Q).

On note O et H les projetés orthogonaux sur (P) de S et D respectivement ; on rapporte le plan (Q) au repère (Oxy) indiqué sur la figure 5 : l'axe $(x'Ox)$ coïncide avec la droite (D), le point S a l'ordonnée $s > 0$ et le point D les coordonnées $a > 0$ et $b < 0$. Un point M de (D) a l'abscisse $x \in R$.

Posons

$$\varphi(x) := n_1 SM + n_2 MD = n_1\sqrt{x^2+s^2} + n_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}.$$

On en déduit que

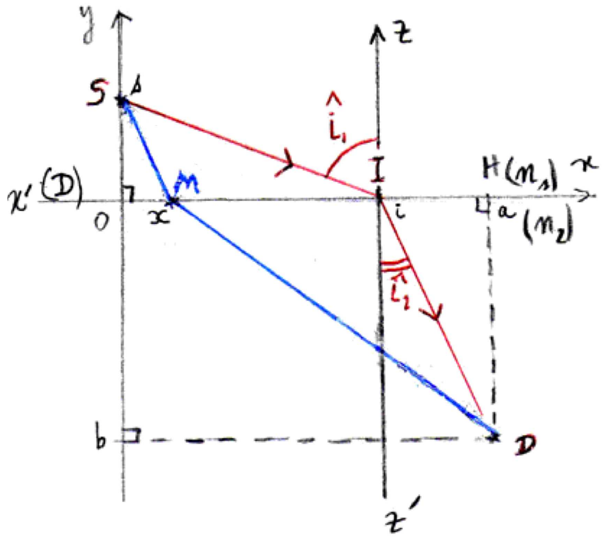

FIG. 5 –

$$\varphi'(x) = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2+s^2}} + \frac{n_2(x-a)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}.$$

Si $x \leq 0$, $\varphi'(x) < 0$ et si $x \geq a$, $\varphi'(x) > 0$. Par conséquent, si $\varphi'(x) = 0$ (condition nécessaire pour que φ présente un extrêmum en x), on a nécessairement $x \in]0, a[$.

Or φ' est continue sur $[0, a]$ avec $\varphi'(0) < 0$ et $\varphi'(a) > 0$. φ' s'annule donc pour une valeur $i \in]0, a[$. On va montrer que φ' n'a pas d'autre valeur d'annulation que i sur $]0, a[$. Soit I le point d'abscisse i sur (D).

Soit un point M d'abscisse x sur (D) avec $x \in]0, a[$. On remarque que

$$\varphi'(x) = n_1 \cos\widehat{OMS} - n_2 \cos\widehat{HMD}$$

donc, en particulier : $\varphi'(i) = n_1 \cos\widehat{OIS} - n_2 \cos\widehat{HID} = 0$.

Si $x \in]0, i[$

$$\cos\widehat{OMS} < \cos\widehat{OIS} \textit{ et } \cos\widehat{HMD} > \cos\widehat{HID}$$

donc $\varphi'(x) < \varphi'(i) = 0$; de même : si $x \in]i, a[$: $\varphi'(x) > 0$. i est donc bien la seule valeur d'annulation de φ' sur $]0, a[$, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier d'après ce qui précède.

De plus, puisque $\varphi'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, i[$ et $\varphi'(x) > 0$ sur $]i, +\infty[$ φ présente en i un minimum strict. Par conséquent,

la somme $n_1 SM + n_2 MD$ présente au point I un minimum pour $M \in (D)$.

Reste à voir le cas où $M \notin (D)$ (voir figure 6). Notons alors N le projeté orthogonal de M sur (D) : on a :

$n_1 SM + n_2 MD > n_1 SN + n_2 ND > n_1 SI + n_2 ID$ (en appliquant ce qui précède au point N de (D)).

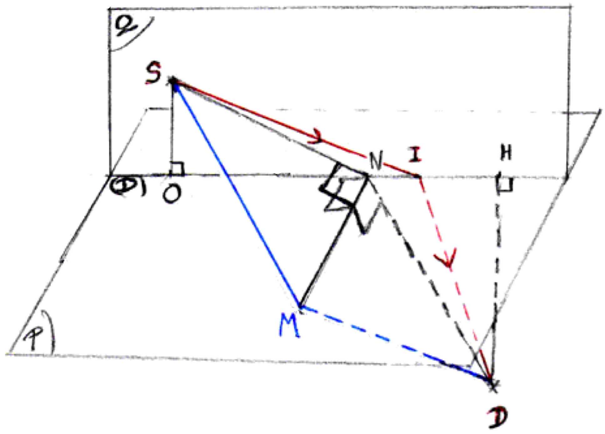

FIG. 6 –

Finalement, on a un unique parcours lumineux de S à D : le parcours $[SID]$, qui correspond à un minimum pour le temps de parcours $[SMD]$ lorsque M décrit le plan (P).

De plus, on a vu que pour ce parcours lumineux : $n_1 \cos \widehat{OIS} - n_2 \cos \widehat{HID} = 0$; en notant $(z'Iz)$ la normale en I au plan (P) orientée comme $(y'Oy)$, $\widehat{i_1}$ l'angle $\widehat{SIz}$ (dit *angle d'incidence*) et $\widehat{i_2}$ l'angle $\widehat{DIz'}$ (dit *angle de réfraction*), on obtient la *Loi de Descartes* pour la réfraction de tout rayon lumineux :

1. Le rayon réfracté est dans le plan perpendiculaire au plan de séparation des milieux et contenant le rayon incident
2. L'angle d'incidence $\widehat{i_1}$ et l'angle de réfraction $\widehat{i_2}$ vérifient :

$$\boxed{n_1 \sin \widehat{i_1} = n_2 \sin \widehat{i_2}}$$

Dans le cas (le plus fréquent) où le premier milieu est l'air (assimilé par approximation au vide, d'indice 1), le second (verre, eau...) ayant l'indice $n > 1$, les notations usuelles sont respectivement $\widehat{i}$ et $\widehat{r}$ pour les angles d'incidence et de réfraction et la loi de Descartes s'écrit :

$$\boxed{\sin \widehat{i} = n \sin \widehat{r}.}$$