Gaspard Monge, de la planche à dessin aux lignes de courbure

R. Langevin

Mai 2002

Ce texte a été publié par les Presses Universitaires Franc-Comtoises, dans un ouvrage édité par M. Michel Serfati intitul "De la Mthode". Nous remercions l'auteur et l'éditeur de nous avoir permis de le diffuser sur Culture*MATH.*

Résumé L'expérience du dessin de plans et la curiosité scientifique de Gaspard Monge ont à notre avis influencé sa manière, très visuelle, de raisonner en mathématiques. Il était aussi un enseignant remarquable. Le souci de former les futurs cadres de la nation, donc d'expliquer à la fois les notions mathématiques et leurs éventuelles applications est sans doute lié à son besoin de voir et de représenter de manière précise les objets mathématiques qu'il définit.
Mots-clés. Lignes de courbure, surface développable, normales, défilement, géométrie descriptive.

Les indications historiques comme celles concernant l'activité non mathématique de Monge, viennent souvent du livre de R. Taton [Ta] ; l'auteur remercie M. Pauty, professeur à l'université de Bourgogne, pour lui avoir fourni des documents personnels concernant la vie de G. Monge, et le relecteur de l'article pour son exigence constructive.

Citons l'avant-propos du journal polytechnique, numéro de Germinal, an III [1][Mo2] :
... qu'enfin ses élèves étant destinés à remplir un jour, soit des fonctions d'ingénieur de différent genres, soit des professions particulières qui exigent des hommes éclairés dans les sciences ou les arts, on leur apprend les parties de mathématiques et de physique qui sont effectivement la base des connaissances nécessaires à l'exercice de ces divers états.

Ainsi, l'enseignement de l'école a deux branches principales:

la première comprend, d'une part l'analyse mathématique, avec ses applications à la géométrie et à la mécanique; d'autre part, la géométrie descriptive divisée en trois parties: la stéréotomie[2], l'architecture , la fortification.

Le dessin s'y trouve joint, soit comme étant la description moins rigoureuse, mais souvent la seule possible, des objets; soit comme art de goût.

Dans la seconde branche il s'agit de physique générale et de chimie (...)

On ne saurait trop, dans un moment où l'on va réorganiser l'instruction publique en France, insister sur la necessité d'obliger les jeunes élèves de tout âge à un travail manuel; sans cela ils n'auront que des notions superficielles, et seront incapables d'une occupation suivie

Fils d'un commerçant en étoffe ayant une boutique à Beaune, Gaspard Monge[3] étudia

[1] Le calendrier républicain commençait à l'équinoxe d'automne (22 septembre) ; il comprenait 10 mois de 30 jours, et 5 jours complémentaires ; l'an I commençait le 22 septembre 1792, donc germinal an III correspond à 1795. Ce calendrier restera en vigueur jusqu'en 1806.

[2] science de la taille et de la coupe des solides employés dans l'industrie et la construction.

[3] 1746-1818

au collège de cette ville, puis au collège de la Trinité à Lyon, où, dès 1762 (il avait alors seize ans) il fut chargé d'enseigner la physique.

Fin 1764, il arriva à Mézières où il commença d'enseigner à la gâcherie, c'est à dire dans la section d'enseignement pratique où l'on montrait aux élèves de l'École Royale du Génie l'assemblage des charpentes, la confection des voûtes et le dessin des plans.

Il en gardera une vision concrète de l'espace, mais aussi une rancune tenace d'avoir été confiné dans un emploi modeste et sans avenir. Il ne pouvait en effet prétendre devenir élève officier car cela n'était possible que pour des jeunes gens dont les pères étaient nobles ou pour le moins vivaient noblement (c'est à dire sans exercer une profession commerciale ou industrielle).

C'est là qu'il mit au point une solution théorique élégante au problème du défilement, ce qui lui valut tout de même d'être nommé répétiteur de mathématiques à Mézières en 1766. Cependant la théorie de la géométrie descriptive restera d'abord le secret de l'école de Mézières. Elle ne fera l'objet d'une divulgation plus large que plus tard (1794-95), lors de la fondation de l'École Polytechnique et d'un cours donné à l'École Normale pendant l'an III (la première partie du cours sera publié l'an VII).

Dans cet article, nous verrons trois exemples de sujets géométriques traités par G. Monge :

- Le défilement, remarquable travail d'ingénieur,
- Le début du cours de geométrie descriptive, un enseignement pour de futurs enseignants,
- L'étude des lignes de courbures d'une surface de $\mathbb{R}^3$,

Nous insisterons sur la vision géométrique d'un problème que Monge savait faire partager à son auditoire. Il n'est donc pas étonnant que son style, en particulier dans les *leçons de géométrie descriptives* reflète son souci de montrer et faire imaginer. Ce style était particuli'erement adapté au public, de formation très diverse, qui, en l'an III, assistait aux leçons de Monge.

Cependant il ne négligeait pas pour autant le point de vue analytique. Citons encore Monge : *leçons de géométrie descriptives* p.62 [Mo1], *Il faut donc que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations de l'analyse et cettes de la géométrie ; il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture.*

1 Le défilement.

1.1 Le défilement passif.

Il s'agit de déterminer les régions (d'une forteresse) à l'abri de tir ennemis supposés tendus, c'est à dire tels que la balle décrit une trajectoire qui peut être légitiment approximée par une ligne droite.

Chaque point E de la surface extérieure à la forteresse peut être l'origine d'un tir. Cependant si l'on considère seulement les tirs pouvant raser un parapet, la partie de leur trajectoire située "avant" le parapet p est contenue dans un demi-plan qui contient l'arête (que l'on note encore p[4]) de ce parapet (voir figure 1). En partant de la verticale et en tournant vers l'extérieur de la forteresse, un premier plan touche le relief extérieur. C'est le plan de défilement associé à l'arête considérée ; il touche en général le relief extérieur en un unique point C. Il reste à associer à chaque coin A entre deux parapets p_1 et p_2, un morceau du cône de sommet A qui s'appuie sur le relief extérieur délimité par les rayons

[4]Le puriste n'admettant pas de parapets plans saura déterminer quelle arête il faut considérer.

A, C_1 et A, C_2. On détermine ainsi une surface développable[5]. Les points situés entre la surface de la forteresse et cette surface développable sont à l'abri de tirs tendus venant de l'extérieur de la forteresse (en toute rigueur, du côté considéré).

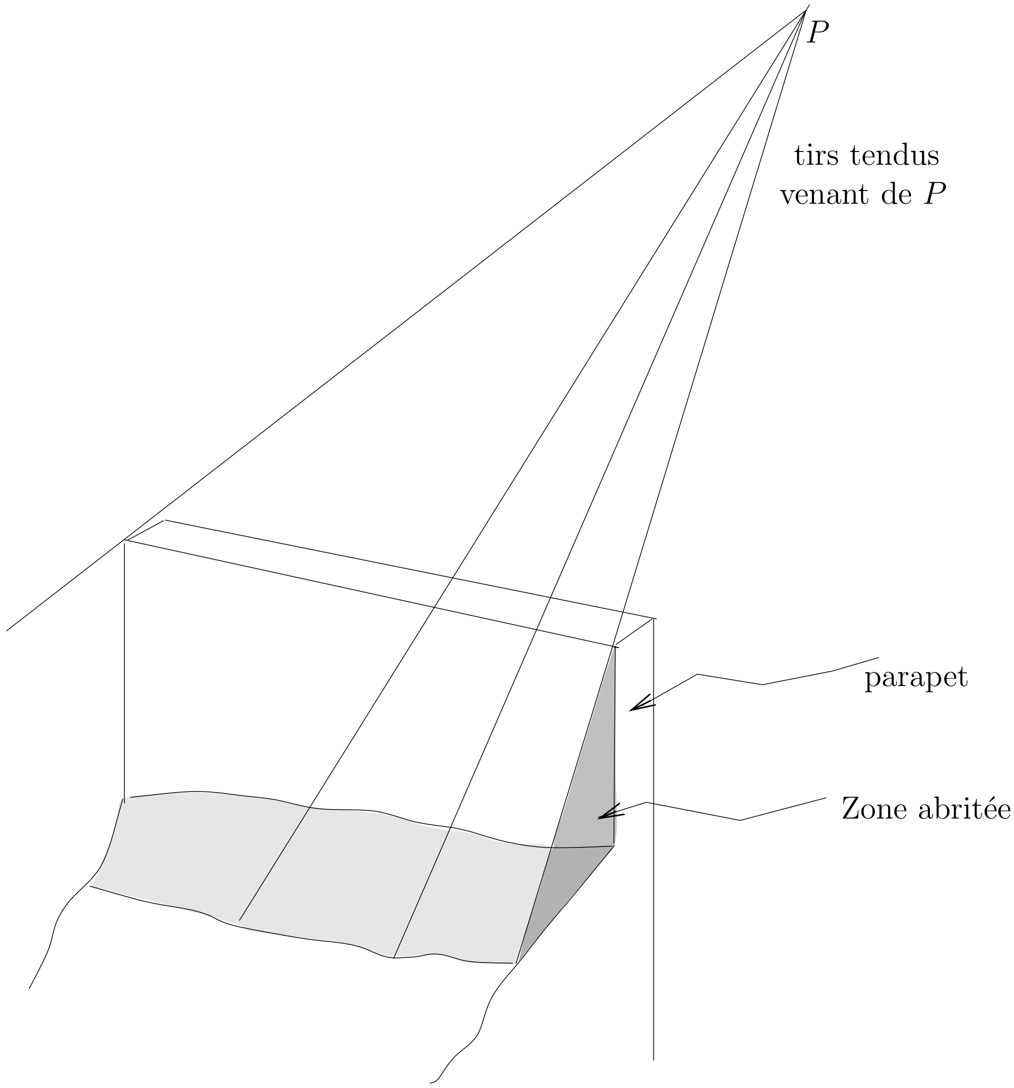


Figure 1: défilement du tir provenant d'un point

1.2 Le défilement actif.

Bien sûr, il faut maintenant utiliser le principe du défilement passif pour fortifier au mieux une place.

Supposons maintenant connues des règles permettant de construire une forteresse en terrain plat (et horizontal). Des tirs de toutes sortes, tendus ou non, peuvent provenir de la surface extérieure. Le mathématicien peut éprouver le besoin de définir cette surface extérieure; elle ne peut commencer exactement au pied des remparts, car des tirs presque verticaux permettent toujours d'atteindre une place protégée par des parapets. Peut importe, nous supposons ce problème résolu.

Considérons d'abord le problème suivant : protéger deux points importants A et B de tirs provenant de la surface extérieure située "devant" le segment $[A, B]$. Considérons de nouveau un pinceau de demi-plans d'axe contenant cette fois le segment $[A, B]$. En partant de la position verticale, un premier demi-plan P touche le relief extérieur en un

[5]nous étudierons ces surfaces dans la partie 3

point C. Si l'on sait protéger les points A et B des tirs venant de C, on a su les protéger de tous les tirs tendus venant de la région extérieure située devant la droite contenant A et B. Pour protéger ces points aussi bien que l'on aurait pu le faire en terrain (horizontal) plat, il suffit de construire au dessus du plan P comme on l'aurait fait au dessus du plan horizontal en terrain plat. Pour caractériser ce plan, Monge considérait le cône tangent au relief ayant pour sommet un point du segment $[A, B]$. Le demi-plan (supérieur) tangent à ce cône est le plan P. La construction ne dépend pas du choix du point sur le segment $[A, B]$.

Si l'on se contente de protéger un point A de la place, il faut considérer, à la place du plan P, le cône s'appuyant sur le relief extérieur ; il suffit en pratique de choisir un plan d'appui d'une partie dangereuse de ce relief extérieur, déterminé donc par A et deux points C et C' du relief extérieur, voir figure 2, puis de construire sur ce plan comme on l'aurait fait en terrain plat.

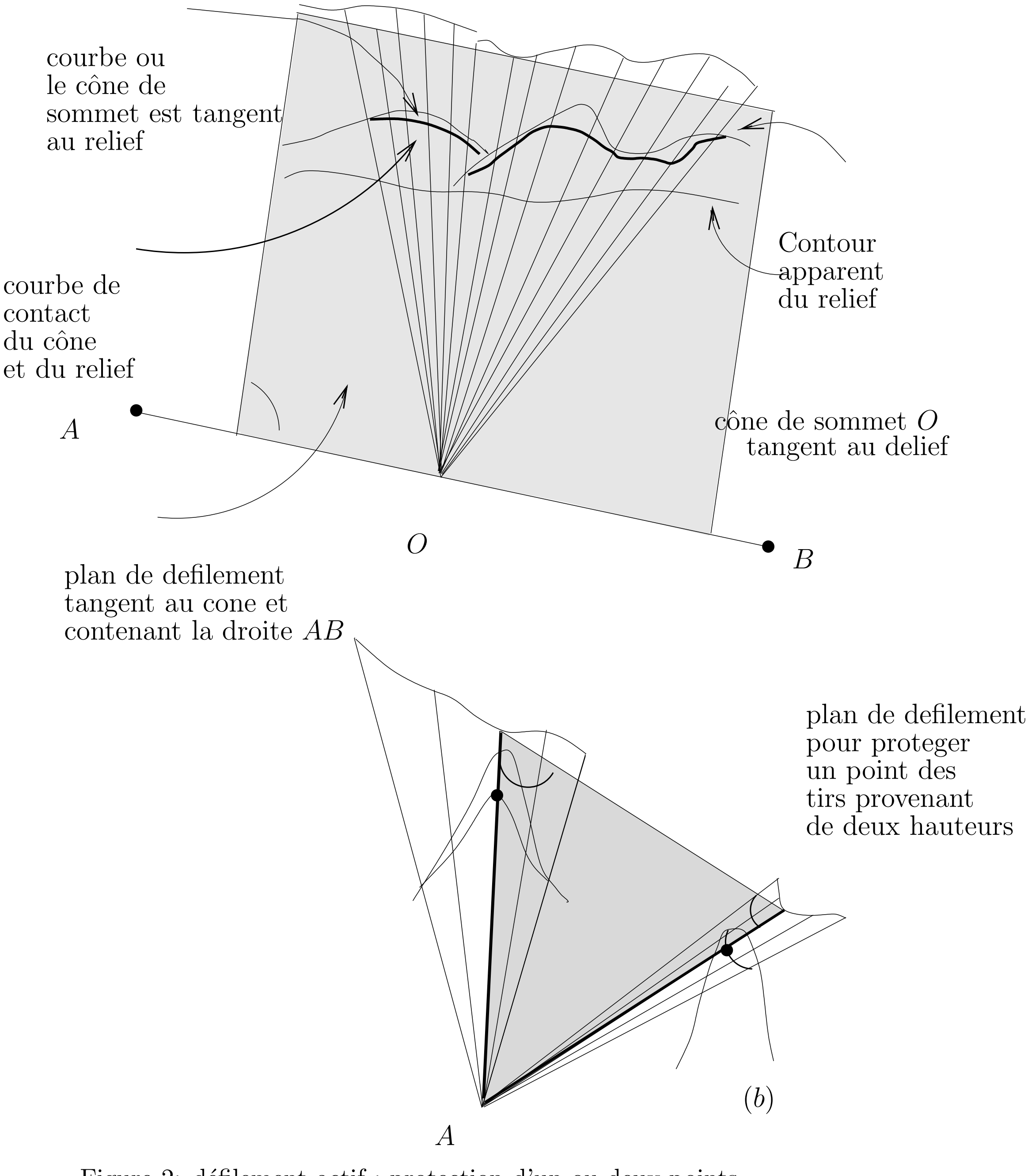


Figure 2: défilement actif ; protection d'un ou deux points

2 La géométrie descriptive.

Déjà Dürer, entre 1524 et 1532, avait étudié les règles de la perspective et les correspondances entre projections d'un même point sur des plan différents. Cependant il demeurera longtemps incompris. Un travail plus récent était à l'époque celui de Frézier (traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture). Le principe : rabattre sur le plan de l'épure la section du terrain par le plan vertical passant par le centre de la place et le point le plus élevé des environs, avait aussi été énoncé par par Milet de Mureau, élève de l'école du génie de Mézière [Ta].

Cependant l'utilisation systématique du procédé allié à des constructions géométriques des points des deux projections trouve son apogée dans les leçons de géométrie descriptive de Monge [Mo1] [Mo1bis]. Citons ce que dit Gauss de cet ouvrage : *Cet ouvrage doit être loué pour sa grande clarté, sa concision dans l'exposé, sa progression bien ordonnée du plus facile au plus difficile, la multitude des nouvelles idées qu'il apporte et pour sa réalisation parfaite. À cause de cela, nous devons en recommander la lecture ; on y puisera une riche nourriture spirituelle qui contribuera incontestablement à la conservation et au progr'es du véritable esprit géométrique qui manque parfois à la mathématique nouvelle.*

L'objectif de la géométrie descriptive est donc de représenter, de manière complète et non ambigüe, sur une figure à deux dimensions, *l'épure*, des objets de dimension trois. Elle permet aussi la construction rigoureuse de la représentation de points choisis de cet objet. Citons Monge [Mo1]: *Le premier [objectif] est de représenter avec exactitude sur des desssins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoureuse. (...)*

Le second objet de la géométrie descriptive est de déduire de la description des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives.

Rappelons le principe de base.

Chaque point M d'un objet dans l'espace se projette en deux points M_P et M_Q sur deux plans orthogonaux P et Q. Les points M_P et M_Q se projettent sur le même point m de la droite Δ intersection de P et Q.

Supposons que le plan P soit horizontal. Si le plan vertical Q pivote de 90^o autour de Δ la projection de la figure sur Q est maintenant représentée dans le plan horizontal (*plan de l'épure*).

Pratiquement Monge représente la droite Δ, appelée ligne de terre, horizontale (cette fois dans le plan de l'épure).

Pratiquement, il faudrait pour que la figure soit, quelle que soit la complexité du dessin, non ambigüe, indiquer par des pointillés les joignant à leur projection commune sur Δ, la correspondance entre tous les points des paires M_P, M_Q. En fait, il suffit de le faire pour quelques points bien choisis.

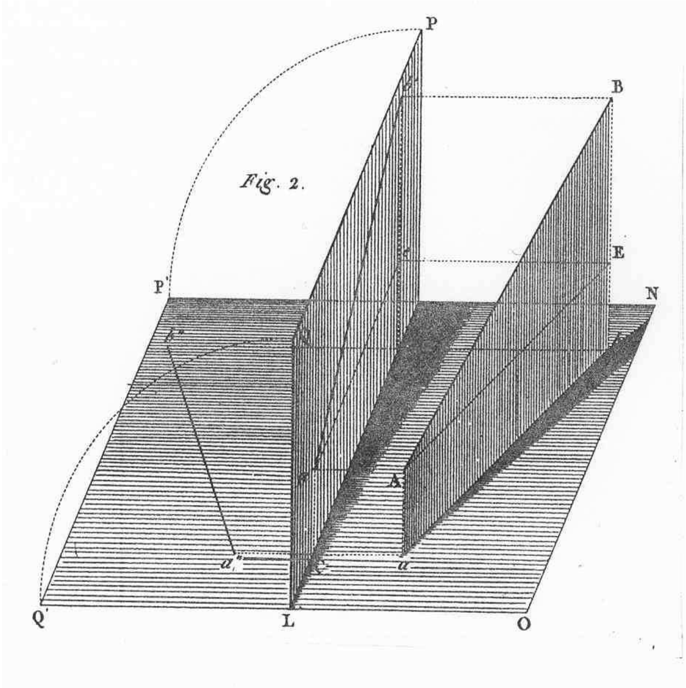
Donnons un exemple simple de construction tiré des leçons de géométrie descriptive [Mo1].

16 Troisième question. *étant donnés (Fig. 6 des "leçons de géométrie descriptives [Mo1]*[6]*) un plan dont les deux traces*[7] *soient AB, BC, et un point dont les deux projections soient D,d, construire* 1^0. *Les projections de la droite abaissée perpendiculairement du point sur le plan ;* 2^0. *celle du point de rencontre de la droite et du plan.*

Solution. *Les perpendiculaires DG, dg, abaissées des points D et d sur les traces respectives du plan, seront les projections indéfinies de la droite demandée ; car si par la perpendiculaire on conçoit un plan vertical, ce plan coupera le plan horizontal et le plan donné en deux droites, qui seront l'une et l'autre perpendiculaires à la commune intersection AB de ces deux plans : or, la première de ces droites étant la projection du*

[6]Notre figure 4

[7]Trace d'un plan sur un autre : on dirait aujourd'hui intersection d'un plan avec un autre



(a) Fig2 , tirée de [Mo1]

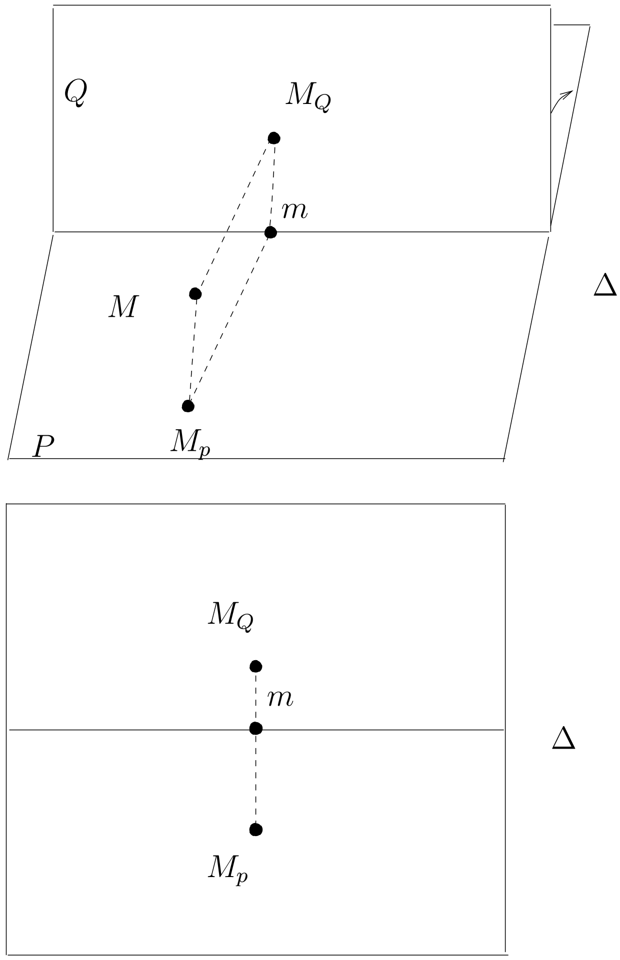


Figure 3: Le principe de la géométrie descriptive. (a) Fig. 2 de [Mo1], (b) rabattre le plan vertical sur le plan de l'épure.

Figure 4: Construction de la perpendiculaire à un plan ; fig.6 chez Monge.

plan vertical, est aussi celle de la perpendiculaire qu'il renferme ; donc la projection de cette perpendiculaire doit passer par le point D, et être perpendiculaire à AB.

La même démonstration a lieu pour la projection verticale.

Quant au point de rencontre de la perpendiculaire et du plan, il est évident qu'il doit se trouver sur l'intersection de ce plan avec le plan vertical mené par la perpendiculaire ; intersection qui est projetée indéfiniment sur EF. Si l'on avait la projection verticale fe de cette intersection, elle contiendrait celle du point demandé ; et parceque ce point doit assi être projeté sur la droit dg, il se trouverait à l'intersection g des deux droites fe et dg. Il ne reste donc plus à trouver que la droite fe : or, l'intersection du plan donné avec le plan vertical qui lui est perpendiculaire rencontre le plan horizontal au point E, dont on aura la projection verticale e, en abaissant Ee perpendiculairement sur LM ; et elle rencontre le plan vertical de projection en un point dont la projection horiqzontale est l'intersection F de la droite LM avec DG, prolongéee, s'il est nécessaire, et dont la projection verticale doit être sur la verticale Ff et sur la trace CB ; elle sera donc au point f de leur intersection.

La projection verticale g du pied de la perpendiculaire étant trouvée, il est facile de construire sa projection horizontale ; car si l'on abaisse sur LM la perpendiculaire indéfinie gG, cette droite contiendra le point demandé : or, la droite DF doit aussi le contenir ; donc il sera au point G de l'intersection de ces deux droites.

3 Enveloppes et ombres.

3.1 Ombres.

Dessiner des ombres portées est un problème de dessin parfois difficile. Il faut imaginer quels rayons lumineux, provenant d'une source de lumière, ponctuelle ou non, sont interceptés par un corps opaque. L'intersection des rayons non interceptés avec une surface donnée (par exemple un plan), formera les régions totalement ou partiellement éclairées. Monge ramène ce problème de dessin à la détermination de l'intersection de l'enveloppe d'une famille à un paramètre de plans et d'une surface.

Dès 1780, Monge considère des surfaces *développables*[8] (cf. infra) dans son mémoire [Mo4] et remarque que les surfaces délimitant les zones d'ombre ou de pénombre sont développables. Le travail de Monge sur ce sujet est rassemblé dans l'édition de 1827 du cours de géométrie descriptive augmentée par Brisson [Mo1bis].

Monge commence par remarquer que la zone d'ombre (dans l'espace) déterminée par un corps opaque est délimitée par un cylindre si la source de lumière est un point à l'infini, un cône, si la source, toujours ponctuelle, est à distance finie. Le contour apparent, bord de l'ombre portée sur un objet, est l'intersection de la surface de l'objet avec le cylindre (ou le cône).

Lorsque la source de lumière n'est pas ponctuelle, l'espace se divise en trois zones : une complètement éclairée, où aucun rayon lumineux provenant de la source n'est intercepté par l'objet opaque, une d'ombre totale, où aucun rayon lumineux provenant de la source ne parvient, et enfin une zone de pénombre où parviennent seulement une partie des rayons provenant de la source. Le problème de dessin sera en partie résolu si les bords des trois zones sont déterminées.

On devine que le bord d'une région de l'espace sera une surface. Les bords des zones d'ombre et de pénombre sont formés de rayons lumineux; si ce sont des surfaces, elles sont donc *réglées*.

3.2 Surfaces développables.

Avant de poursuivre, étudions un peu les familles à un paramètre de droites, dont la réunion forme une surface réglée. On appelle les droites de la famille les *génératrices* de la surface.

Soient D_1 et D_2 deux droites disjointes non parallèles. La distance entre les deux droites est la longueur du segment $[M_1, M_2]$, $M_1 \in D_1$, $M_2 \in D_2$ contenu dans la perpendiculaire commune aux deux droites. Dans une famille à un paramètre D_t, la distance $d(D_t, D_{t+h})$ est en général de l'ordre de h. Nous allons indiquer pourquoi, lorsque la surface est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de plans, cette distance est un $o(h)$.

Commenons par montrer qu'une famille à un paramètre de plans admet une *enveloppe* qui est une surface réglée Σ d'un type particulier : le long d'une génératrice, le plan tangent est constant (une référence pour les enveloppes est le livre de Pierre Martin [Ma]).

Considérons maintenant une famille à un paramètre de plans P_t d'équation $a(t)x + b(t)y + c(t)z + d(t) = 0$. Nous cherchons une surface réglée, tangente à la famille de plans que nous appellerons l'*enveloppe* de la famille. Pour obtenir une famille à un paramètre de droites D_t, considérons le plan P'_t d'équation $a'(t)x + b'(t)y + c'(t)z + d'(t) = 0$. La droite D_t est l'intersection $P_t \cap P'_t$. Lorsque cette dernière est à distance finie, c'est aussi la limite de l'intersection $P_t \cap P_{t+h}$ quand h tend vers 0.

Il faudrait vérifier que le plan P_t est tangent à la surface $\Sigma = \cup D_t$ le long de la droite D_t. La figure 7 rend cette affirmation vraisemblable.

[8] Définies par Euler

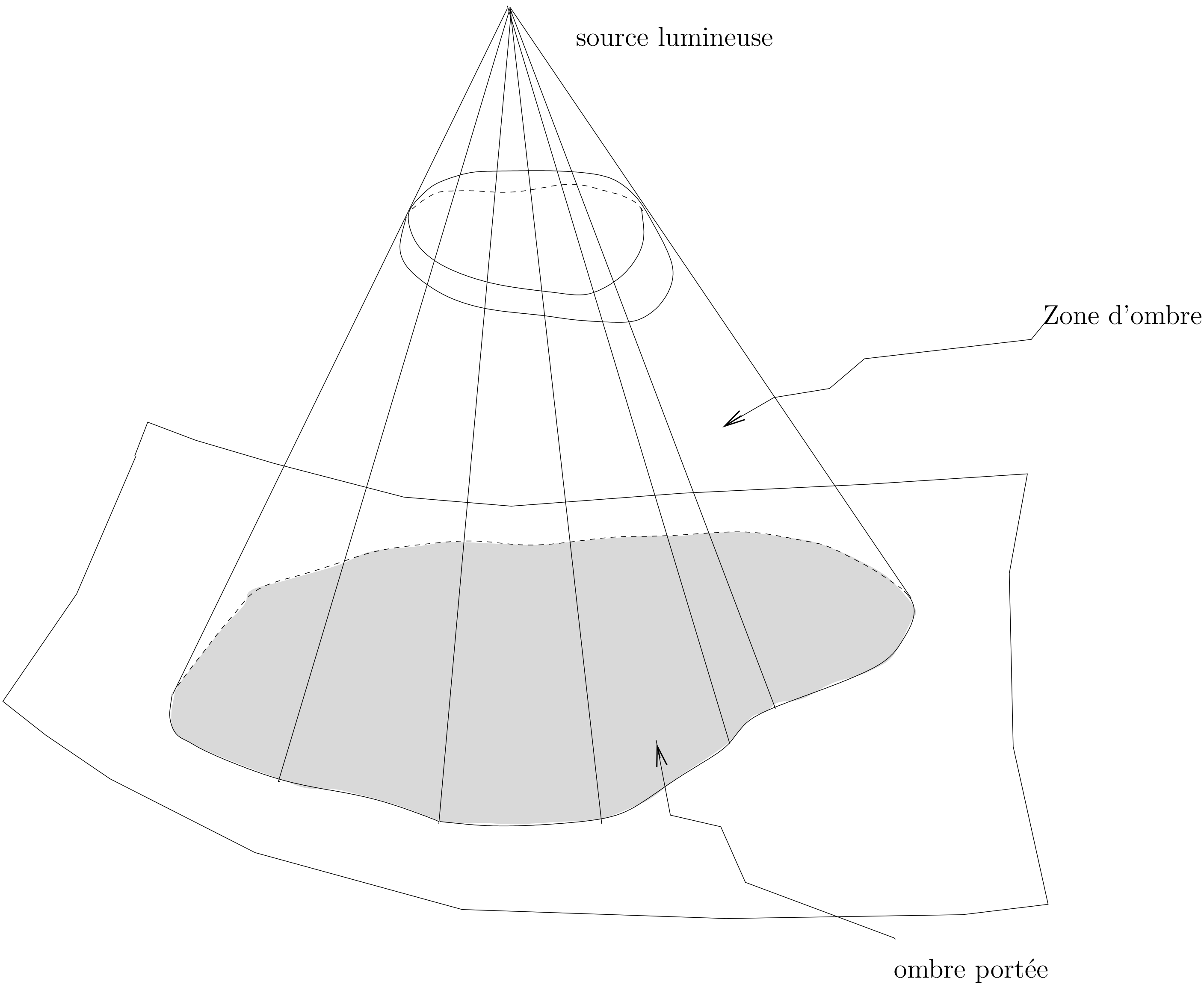


Figure 5: Zone d'ombre et ombre portée lorsque la source est ponctuelle.

Étudions d'abord la famille de droites D_t. Au moins lorsque le déterminant :

$$det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) & c(t) & d(t) \\ a'(t) & b'(t) & c't & d'(t) \\ a''(t) & b''(t) & c''(t) & d''(t) \\ a'''(t) & b'''(t) & c'''(t) & d'''(t) \end{pmatrix}$$

n'est pas nul, les droites D_t sont tangentes à une courbe C. Le point de contact $m(t)$ de D_t avec cette courbe est solution du système :

$$\begin{array}{ccccccccc} a(t)x & + & b(t)y & + & c(t)z & + & d(t) & = & 0 \\ a'(t)x & + & b'(t)y & + & c'(t)z & + & d'(t) & = & 0 \\ a''(t)x & + & b''(t)y & + & c''(t)z & + & d''(t) & = & 0 \end{array}$$

La courbe C est appellée *l'arête de rebroussement* de la surface Σ.

En effet la surface est la réunion des tangentes à la courbe C, et, lorsque la torsion de la courbe n'est pas nulle, les points de C sont des points singuliers de la surface comme dans la figure 8. En suivant chacune des demi-tangentes (d'origine le point de tangence avec C) on obtient deux *nappes* de la surface Σ.

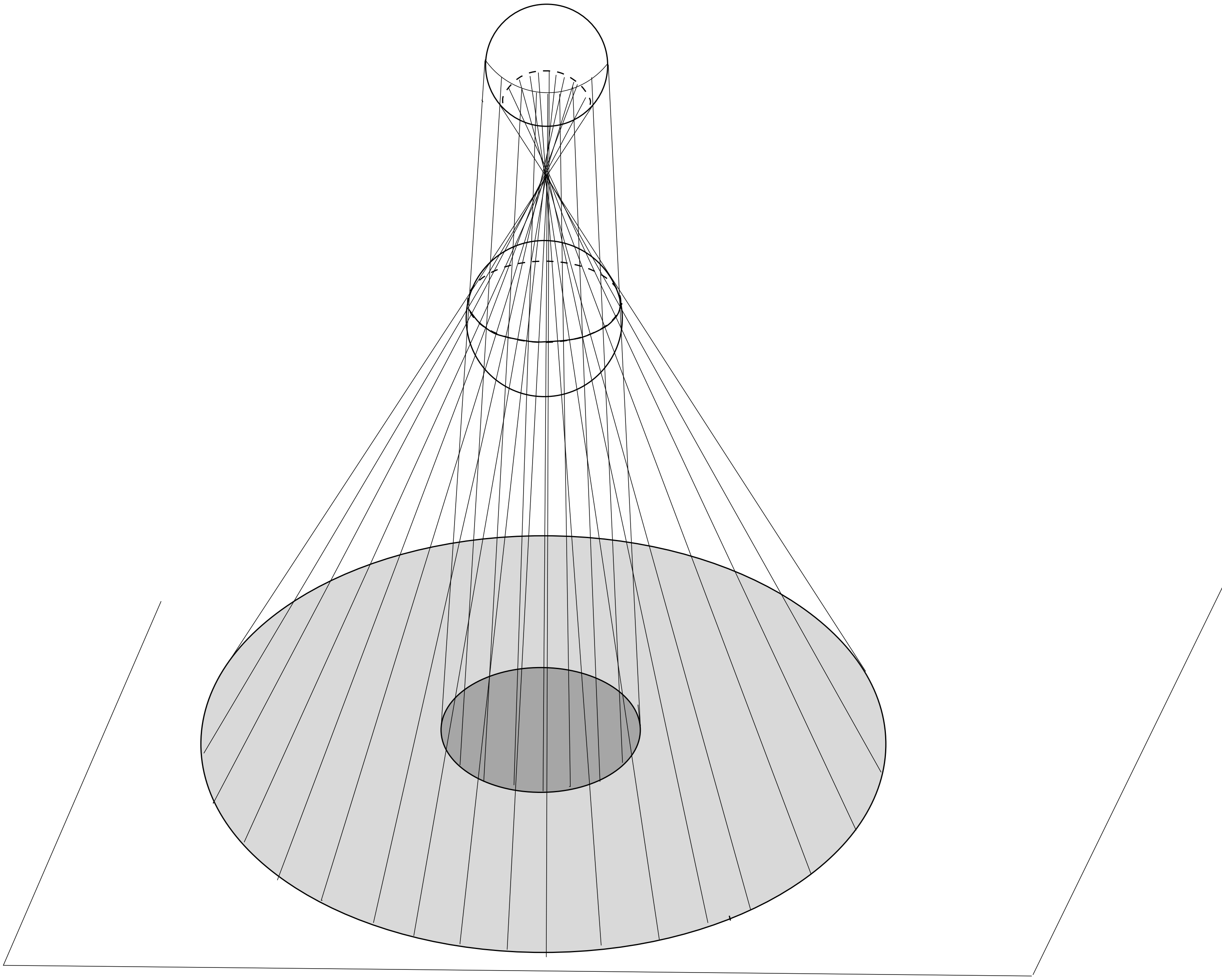


Figure 6: Ombre et pénombre

On observe alors que la distance $d(D_t, D_{t+h})$, majorée par la distance du point $m(t+h) \in C$ à la tangente D_t à C en $m(t)$, est un $O(h^2)$. De fait, dans ce cas, en général, les droites D_t et D_{t+h} se coupent près du point $m(t)$. En effet on peut démontrer que chaque nappe de la surface développable engendrée par une famille de demi tangentes à l'arête de rebroussement C est isométrique à une région plane : un coté de la courbe plane $\overline{C}$ dont la courbure exprimée en fonction de la longueur d'arc satisfait la même relation que la courbure de la courbe gauche C (on suppose pour cela que la courbure de C ne s'annule pas). Or, dans le plan, deux tangentes à $\overline{C}$ en des points proches se coupent. Il en va donc de même pour les tangentes correspondantes de la surface développable. L'isométrie entre une nappe de Σ et une region d'un plan euclidien peut être vue "mécaniquement" : la nappe de bord C peut être roulée sans glisser sur le plan ; à chaque instant elle est en contact avec le plan le long d'une génératrice. On *développe* une nappe de la surface sur le plan si, au lieu de l'imaginer solide, on l'applique progressivement sur le plan, collant chaque demi-tangente sur la demi-droite du plan avec laquelle elle se confond lors du roulement sans glissement.

Sur une surface développable, les droites voisines sont donc en général concourantes,

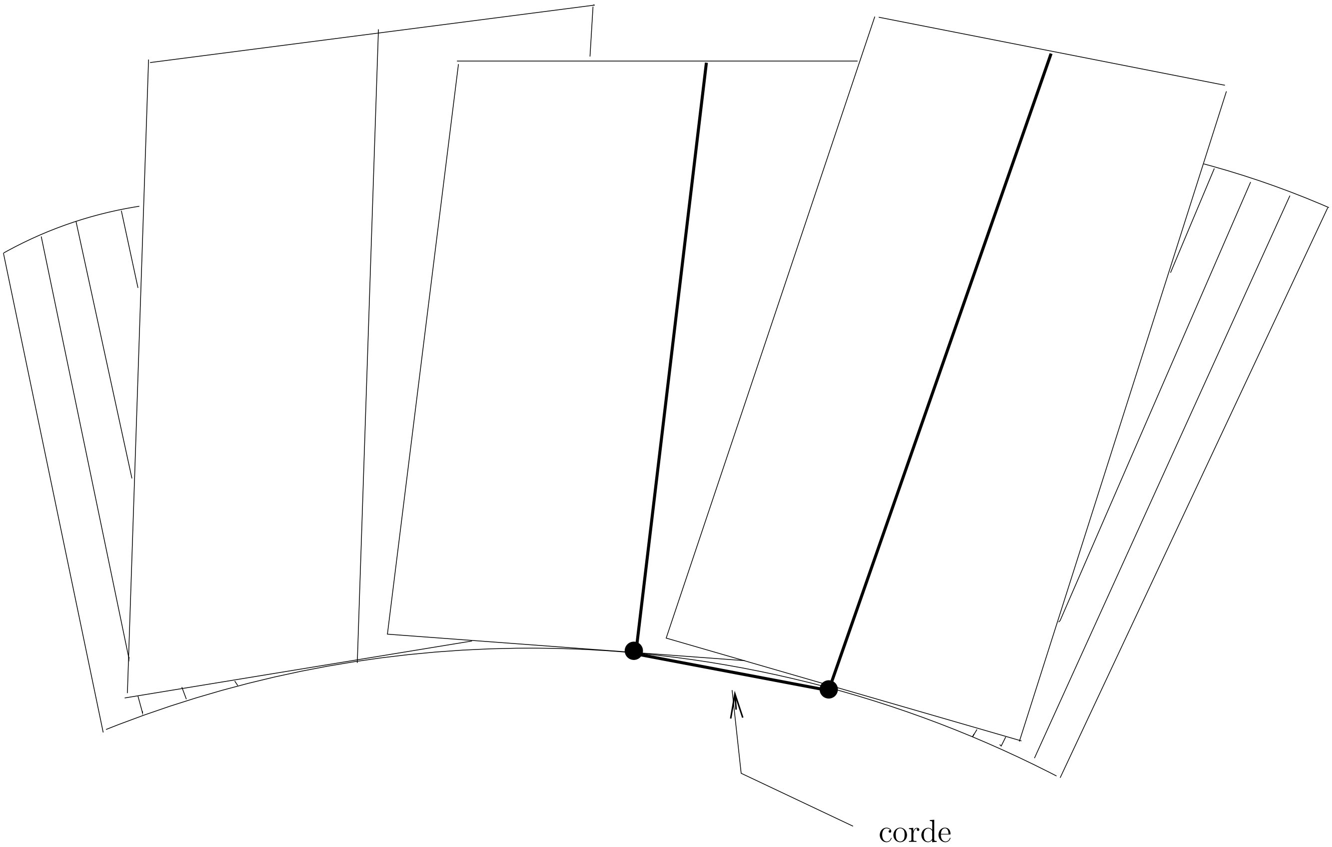


Figure 7: Corde joignant deux points de deux génératrices voisines.

comme les droites d'une famille à un paramètre dans le plan. Nous appelerons le point $m(t) \in D(t) = lim(D_t \cap D_{t+h}$, qui est sur la courbe singulière C de la surface (abrgé en $m \in D$ si le paramétrage n'est pas important), *point focal* de la droite.

Nous pouvons maintenant indiquer pourquoi, lorsque la source de lumière n'est pas ponctuelle, les limites des zones d'ombre et de pénombre sont des surfaces développables. Pour simplifier un peu la démonstration, supposons que la source $\mathcal{S}$ et le corps opaque $\mathcal{O}$ sont convexes. Un rayon lumineux tangent à $\mathcal{O}$ et $\mathcal{S}$ est contenu dans un plan tangent P à $\mathcal{O}$ et $\mathcal{S}$; en effet, comme ces plans sont des plans d'appui[9] de chacun des convexes, le rayon ne peux que provenir de $P \cap \mathcal{S}$ et arriver en un point de $P \cap \mathcal{O}$. Les plans tangents à la fois à $\mathcal{O}$ et $\mathcal{S}$ sont de deux sortes : ceux qui laissent $\mathcal{O}$ et $\mathcal{S}$ du même coté, ceux qui les séparent.

Chacune de ces familles de plans est une famille à un paramètre, et admet donc une enveloppe qui est une surface développable, et qui délimite ombre et pénombre ou pénombre et lumière.

Ce thème revient dans le mémoire sur les déblais et remblais (1781) [Mo3]. Nous allons voir plus loin comment ce point de vue est la base de la vision de Monge des lignes de courbure d'une surface.

4 Les courbures principales et les lignes de courbure.

Les courbures principales en un point d'une surface de $\mathbb{R}^3$ avaient été précédement définies par Euler [Eu1]. Monge les retrouve par une méthode du type "enveloppe".

[9] Un plan d'appui P d'un convexe $\mathcal{O}$
- contient au moins un point du convexe
- est tel que le convexe est contenu dans l'un des demi-espaces fermés de bord P.

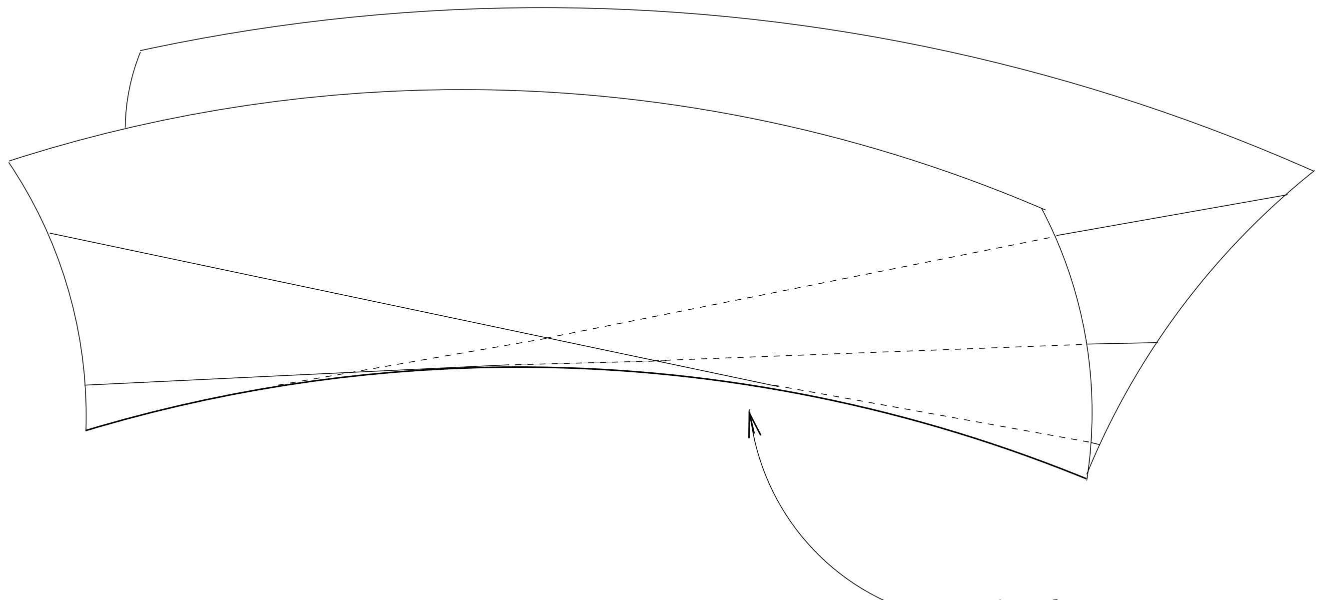


Figure 8: Les tangentes à une courbe gauche forment une surface développable

4.1 Euler

Euler commençait par chercher à déterminer les rayons des cercles osculateurs à toutes les sections planes d'une surface S passant par un point $m \in S$, et en particulier aux sections de la surface par des plans orthogonaux en m à S. Plutôt que d'effectuer, comme Euler, un calcul en prenant des coordonées telles que S soit un graphe au voisinage du point m, prenons, comme le fera Gauss, des coordonnées (x, y, z) telles que m soit l'origine et le plan engendré par (y, z) le plan tangent à la surface en m. Soit, dans ce système, $z = F(x, y)$ l'équation locale de la surface. Une section C_φ de la surface par un plan vertical H_φ contenant l'origine, repéré par les coordonnées (ρ, z) est:

$$z = f_\varphi(\rho) = F(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi),$$

où φ est l'angle du plan de section H_φ avec le plan vertical contenant l'axe des x.

Le rayon de courbure de cette section est $R_\phi = \frac{1}{d^2z/d^2\rho}$. En effet un cercle tangent en m à la section verticale C_ϕ a une équation de la forme $(z - R)^2 + \rho^2 = R^2$, $où\, R \neq 0$; l'équation de ce cercle peut se mettre sous la forme $z = f_R(\rho) = \frac{1}{2R}\rho^2 + o(\rho^2)$. Parmi les cercles tangent en m à C_φ, un seul est tel que la différence $f - f_R$ soit un $o(\rho^2)$: c'est le cercle osculateur. Le rayon de ce cercle est R_φ.

Ce rayon se calcule en fonction des derivées partielles secondes de z par rapport à x et y. Il est plus commode de travailler avec la courbure $k_\varphi = \frac{1}{R_\varphi}$, que l'on appelera *courbure normale* dans la direction definie par l'angle φ.

$$k_\varphi = cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x} + 2cos\varphi sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}$$

Les extrema de k_φ sont obtenus lorsque $-sin2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x} + 2cos2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + sin2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y} = 0$. Cela donne deux plans verticaux orthogonaux pour lesquels la courbure k_φ (et donc aussi le rayon de courbure R_φ sont extrema (en fait on obtient un maximum et un minimum dès que ces deux valeurs sont différentes). On appelle les deux courbures ainsi obtenues *courbures principales* en $m \in S$. Ces résultats seront repris et complétés dans le mémoire de Meusnier [Meu]

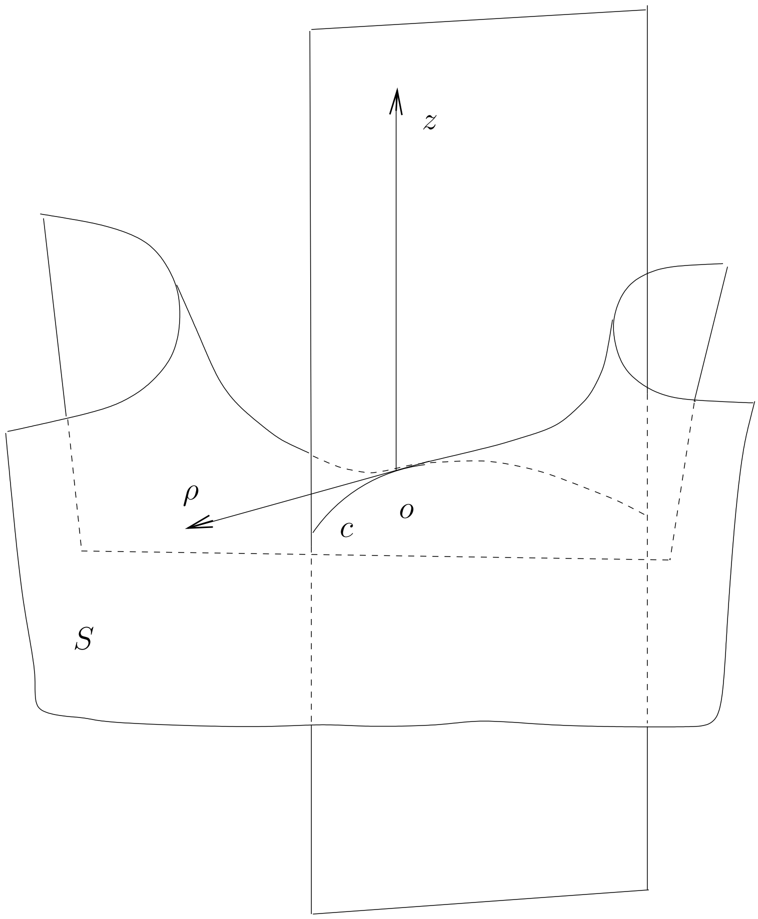


Figure 9: Section normale d'une surface

4.2 L'application de Gauss

Nous allons présenter aussi le point de vue de Gauss ([Ga], pourtant postérieur aux travaux de Monge, car il éclaire l'usage des normales à une surface pour définir plusieurs courbures. Ce point de vue est repris dans les livres actuels de géométrie.

Considérons une surface plongée $S \subset \mathbb{R}^3$. Au moins si elle est sans bord, elle est orientée, car on peut choisir le vecteur normal $N(m)$ en $m \in S$ qui pointe vers l'extérieur de la composante bornée de $\mathbb{R}^3 \setminus S$. L'application de Gauss est alors:

$$\gamma : S \to S^2, m \mapsto N(m)$$

Elle envoie chaque point de la surface S sur le point de la sphère unité S^2 extrémité du vecteur normal au point à S.

La *courbure de Gauss* $K(m)$ en $m \in S$ est le jacobien en m de l'application de Gauss.

La figure 10 montre que, quand la courbure de Gauss $K(m)$ est négative, l'application de Gauss γ renverse l'orientation au voisinage du point m. Les deux valeurs propres de $d\gamma(m)$: k_1, k_2 (elles peuvent coïncider) sont les courbures principales de S en m que nous avons défini plus haut. À chacune correspond une direction propre L_i. Les plans $L_1 \oplus \mathbb{R} \cdot N(m)$ et $L_2 \oplus \mathbb{R} \cdot N(m)$ sont orthogonaux en m à la surface et contiennent chacun une direction propre L_i. Les intersections de S avec les plans $L_1 \oplus \mathbb{R} \cdot N(m)$ et $L_2 \oplus \mathbb{R} \cdot N(m)$ sont des courbes : les *sections principales* (en m). Leurs courbures en m sont les courbures principales précitées k_1 et k_2 de S au point m. Les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 sont les inverses des courbures principales. Ce sont les rayons des cercles osculateurs en m aux sections principales. Les centres de ces cercles seront appelés *centres de courbure principaux* (voir figure 9).

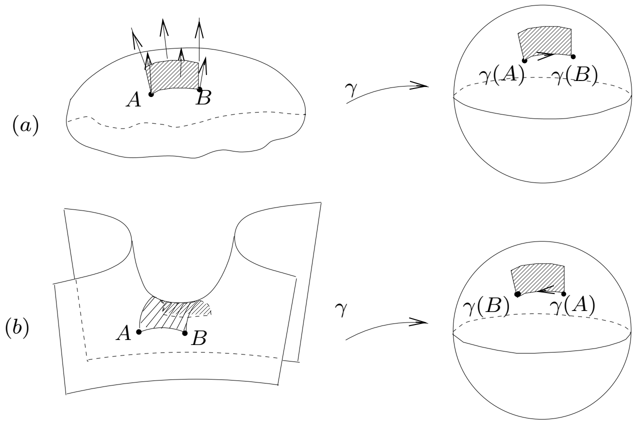


Figure 10: L'application de Gauss

Il faut maintenant démontrer que ces directions propres sont orthogonales. Pour cela définissons une forme quadratique sur le plan tangent T_mS en m à la surface S : la *seconde forme fondamentale* II. On utilise pour cela le produit scalaire dans le plan T_mS (aussi appelé première forme fondamentale); on notera $< u|v >$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v du plan T_mS. La seconde forme fondamentale est alors définie par la formule $II(v) =< d\gamma(v)|v >$. Les directions propres de cette forme quadratique sont les mêmes que celles de $d\gamma$, voir par exemple [Ca] ou [Ma].

Sur un voisinage d'un point où les directions principales sont bien définies, on peut intégrer les deux champs de droites qu'elles définissent, et obtenir ainsi deux familles de courbes que l'on appelle les *lignes de courbure*. Géométriquement, lorsque l'on suit une ligne de courbure, le plan tangent à S ne fait que tanguer. Lorsque l'on suit une courbe quelconque, son mouvement est un mélange de roulis et de tangage.

4.3 Monge

Le point de vue de Monge, que Gauss connaissait, est un peu différent : il va étudier les normales à une surface, et montrer que le long de deux familles particulières de courbes tracées sur la surface, ces normales forment deux familles de surfaces développables.

Monge suppose la surface S donnée par une équation $z = f(x, y)$. Pour obtenir l'équation de deux plans normaux à la surface en un point $m = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, Monge va procéder d'une manière pour nous peu habituelle.

Il considère une famille de sphères σ_x, toutes de même rayon R, de centre les points de la courbe $C_x^{y_0}$ ainsi définie:

La courbe $C_x^{y_0}$, est l'intersection de la surface S par le plan parallèle au plan vertical (yOz) et contenant le point $(0, y_0, 0)$. La famille σ_x de sphères est obtenue en faisant varier x, et donc le point $m_x = (x, y_0, z = f(x, y_0)) \in C_x^{y_0}$. Pour obtenir la limite de l'intersection de deux sphères voisines σ_{x_0} et σ_{x_0+h} de cette famille il suffit de considérer l'intersection de σ_x avec le plan obtenu en dérivant par rapport à x l'équation $(X-x)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z)^2 = R^2$ de σ_x. Cette limite est un cercle contenu dans σ_{x_0} que l'on appelle *cercle caractéristique*. C'est l'intersection de σ_{x_0} et d'un un plan normal en m à S. On le voit, puisqu'en dérivant par rapport à x l'équation $(X - x)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z)^2 = R^2$ des sphères de la famille, on obtient l'équation d'un plan :

$$(P_{\sigma_x}) \;\; (X - x) + (Z - z)p = 0, \; \textit{où } p = \partial z/\partial x \qquad (1)$$

qui est orthogonal en $m = (x_0, y_0, z)$ à la courbe $C_x^{y_0}$ donnée par $z = f(x, y_0)$.

Si le rayon R dépendait de x, le plan $(P_{\sigma_{x_0}})$ ne passerait pas nécessairement par le point m, et ne serait pas nécessairement orthogonal à S.

En considérant les sphères σ_y de rayon R centrées sur les points de la courbe $C_y^{x_0}$, intersection de S avec le plan parallèle au plan (xOz) passant par le point $(x_0, 0, 0)$, on obtient de même un autre plan normal d'équation:

$$(P_{\sigma_y}) \quad (Y - y) + (Z - z)q = 0, \; \textit{où} \; q = \partial z / \partial y. \tag{2}$$

Ces deux plans se coupent suivant la droite normale à la surface au point m (nous dirons souvent dans la suite simplement normale).

Notons $r = \partial q / \partial x$; $s = \partial q / \partial x = \partial p / \partial y$; $t = \partial q / \partial y$.

Pour étudier le comportement de la normale à la surface S le long d'une courbe C tracée sur S, faisons varier chacun des plans (P_{σ_x}) et (P_{σ_y}) le long de la courbe C.

En différentiant les équations 1 et 2, on obtient:

$$\begin{array}{rcl} dx + p^2 dx + pq dy + (z - Z)(r dx + s dy) & = & 0 \\ dy + pq dx + q^2 dy + (z - Z)(s dx + t dy) & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

Supposons maintenant que le plan horizontal (x, y) soit le plan tangent à S en m; on a $p = q = 0$; $z = 0$. En éliminant dy/dx puis Z entre les équations 3 , et en reprenant 1 et 2, on obtient, sauf en des points particuliers de la surface appelés *ombilics*, où la surfaces est très proche d'une sphère, les équations :

$$\begin{array}{l} 1 + (r + t)Z + (rt - s^2).Z^2 = 0 \\ (dy/dx)^2 + (dy/dx)\frac{r-t}{s} - 1 = 0 \end{array} \tag{4}$$

La seconde équation a pour solutions deux pentes $dy/dx = a$; $dy/dx = b$, qui, comme le produit $a \cdot b$ des racines de la deuxième équation est -1, correspondent à deux directions orthogonales.

Choisissons une des solutions. On obtient en chaque point une direction, ce qui (sans se prócupper des problèmes de différentiabilité), donne localement[10] une famille de courbes disjointes partout tangentes à la direction. Ces courbes sont des lignes de courbure (que nous avons déja défini au paragraphe précédant). Une deuxième famille, orthogonale à la première est obtenue en considérant en chaque point la seconde direction.

Pour se convaincre d'avoir ainsi obtenu une nouvelle définition des lignes de courbure, remarquons que, lorsque les quatre plans d'équations 1, 2 et 3 ont un point commun, les normales à S en deux points infinitésimalement voisins le long d'une courbe C tracée sur la surface se coupent en ce point. En général ces quatre plans ne sont pas concourants ; c'est cependant le cas si la pente de la tangente à la courbe C en $m = 0$ est l'une des solutions que nous venons de trouver, et en particulier si cette courbe est une ligne de courbure (deuxième définition).

Paramétrons une ligne de courbure par la longueur de l'arc τ. La manière dont nous venons de définir les lignes de courbure montre que la famille D_τ des normales le long de cette ligne de courbure est particulière : la distance entre deux normales voisines D_τ et $D_{\tau+h}$ est un $o(h)$. Cette propriété implique que la surface engendrée par les normales est développable.

Notre nouvelle définition d'une ligne de courbure est donc : une courbe $C \subset S$ telle que la surface engendrée par les normales à S le long de C soit développable.

Deux normales en deux point voisins d'une ligne de courbure, qui sont des géneratrices d'une surface developpable, se coupent donc. Il n'est pas difficile de se convaincre, en comparant les normales le long de la ligne de courbure et les normales à une section principale, que la limite de ce point d'intersection est l'un des centres de courbure que nous avons défini plus haut.

[10] Sur les disques contenus dans la surface ne contenant pas d'ombilic

L'équation $1 + (r + t)Z + (rt - s^2).Z^2 = 0$ a alors pour racines les coordonnées Z des deux centres de courbure principaux que nous avons définit plus haut à l'aide des cercles osculateurs des sections principales.

On peut vérifier, dans le système de coordonnées que nous avons choisi plus haut, que : $r = k_1$, $s = 0$, $t = k_2$ et donc $Z_1 = \frac{1}{k_1}$; $Z_2 = \frac{1}{k_2}$.

4.4 La présentation des courbures principales et des lignes de courbure dans le cours de géométrie descriptive.

Le but du cours de géométrie descriptive est : convaincre, plutôt que tout démontrer. Monge veut arriver à la proposition suivante, que nous venons d'expliquer :

Proposition 4.4.1 *Il existe en général sur une surface deux familles de courbes orthogonales : les lignes de courbure, caractérisées par le fait que le long de chacune de ces courbes, les normales à la surface forment une surface développable.*

Corollaire 4.4.2 *Une surface quelconque n'a dans chacun de ses points que deux courbures* (principales) *; chacune de ces courbures a un sens*[11] *particulier, son rayon particulier, et les deux arcs sur lesquels se mesurent ces deux courbures sont à angles droits sur la surface.*

Monge commence par l'étude d'un cas particulier : le cyclindre.

Le cyclindre Cyl est le produit cartésien d'une courbe plane $\gamma \subset \Pi$, que nous déciderons être horizontale, par une droite verticale Δ.

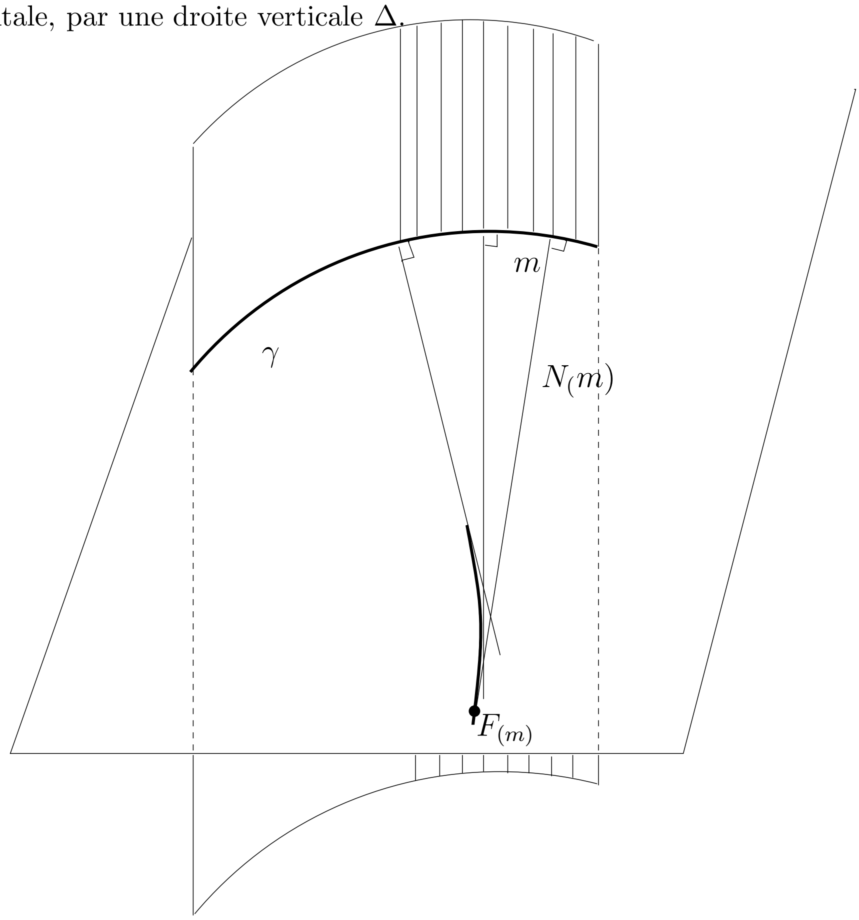


Figure 11: Les normales à un cyclindre

[11]nous dirions aujourd'hui : "signe".

Le long d'une génératrice $m \times \Delta$ la direction normale est constante ; c'est la normale en m à γ. On peut donc considérer que toutes ces normales passent par le point à l'infini ; elles engendrent un plan vertical normal à la surface le long de la génératrice.

Le long d'une section horizontale du cylindre (voir figure 11), les normales restent dans le plan horizontal, reproduisant la situation des normales à la courbe plane γ. En effet, fixons un point $m \in \gamma$. Soit $\mathcal{N}(m)$ la normale en m à la surface S; c'est aussi la normale, contenue dans Π, à la courbe plane γ. Les normales voisines $\mathcal{N}(q)$ coupent $\mathcal{N}(m)$ en un point qui tend, quand q tend vers m, vers une limite $F(m)$. La distance de ce point $F(m)$ à m est le rayon de courbure $|R(m)|$ de la courbe γ en m. Ce rayon peut être fini ou, si m est un point d'inflexion de γ, infini.

Reprenant le point de vue de Gauss, on vérifie que, le long des génératrices et des sections horizontales, le plan normal ne fait que rouler. Un calcul montre que, dans ce cas déjà, les rayons de courbure R_i sont les inverses des courbures principales.

Monge considère ensuite les surfaces développables. De même que le long d'une géneratrice d'un cyclindre, la direction normale est constante le long d'une géneratrice d'une telle surface. En d'autres termes, puisque le plan tangent le long d'une géneratrice d'une surface développable est constant, le point focal correspondant est, comme pour une génératrice d'un cylindre, à l'infini. Pour se convaincre du fait que les normales à une courbe orthogonale aux génératrices de la surface forment une surface developpable, considérons d'abord un cas particulier : le cône de révolution. Les courbes orthogonales aux génératrices du cône sont les cercles section du cône par les plan orthogonaux à l'axe. Les normales le long de ces cercles forment elles-mêmes un cône, et se rencontrent donc au sommet de ce cône.

Monge compare ensuite une surface développable S, au voisinage d'un un de ses point m, avec le cône admettant pour sommet le point focal F de la génératrice D passant par m et s'appuyant sur le cercle osculateur en m à la courbe section de S par le plan orthogonal en m à la génératrice D.

Afin d'étudier une surface générale, Monge considère une famille de cylindres tangents à la surface en m. Pour cela il considère les projections γ_h de la surface sur les plans h orthogonaux en m à la surface. Les surfaces $Cyl_h = \gamma_h \times h^{\perp}$ sont des cyclindres tangents à la surface le long d'une courbe Γ_h qui se projette orthogonalement sur γ_h. Nous dirions aujourd'hui que Γ_h est l'ensemble des *points critiques* de la projection orthogonale de la surface sur le plan h, et on l'appelerait *courbe polaire*; nous dirions aussi que γ_h le *lieu critique* de cette projection. En général, l'angle en m de la courbe polaire Γ_h et $h^{\perp}$ n'est pas droit. Cependant Monge observe que c'est le cas si et seulement si h (et donc aussi la droite $h^{\perp}$) est tangent à une direction principale. Le rayon de courbure principal non nul du cylindre est alors une courbure principale de la surface.

Donnons de ce fait une démonstration "moderne".

Rappelons que nous avons défini sur le plan tangent T_mS à la surface la seconde forme fondamentale. Notons aussi II la forme bilinéaire définie par la formule : $II(u, v) =< d\gamma_m(v)|u >$; on démontre qu'elle est symétrique. Comme la courbe Γ_h est l'ensemble des points critiques de la projection orthogonale de la surface sur le plan h, le long de la courbe Γ_h, le vecteur normal à la surface reste dans h. Ceci implique que $d\gamma_m(v)$ est contenu dans l'intersection $T_mS \cap h$. Soit u un vecteur contenu dans la droite $h^{\perp}$. On a $II(d\gamma_m(v), u) = 0$. Si de plus les deux vecteurs u et v sont orthogonaux, on a $< v|u >= 0$. Or, on ne peut avoir $< d\gamma_m(v)|u >= 0$ et $< v|u >= 0$ que si v est un vecteur propre de $d\gamma_m$; u, qui lui est orthogonal, est alors aussi un vecteur propre de $d\gamma_m$. Les deux vecteurs v et u sont donc contenus dans les directions principales de courbure.

Remarquons d'abord qu'en $m \in S$ la courbure principale non nulle du cylindre tangent à la surface et orthogonal au plan h est la courbure du lieu critique γ_h au point projection orthogonale de m sur h. L'égalité entre une courbure principale de la surface et la courbure du lieu critique γ_h en la projection orthogonale de m sur h lorsque h est tangent à une

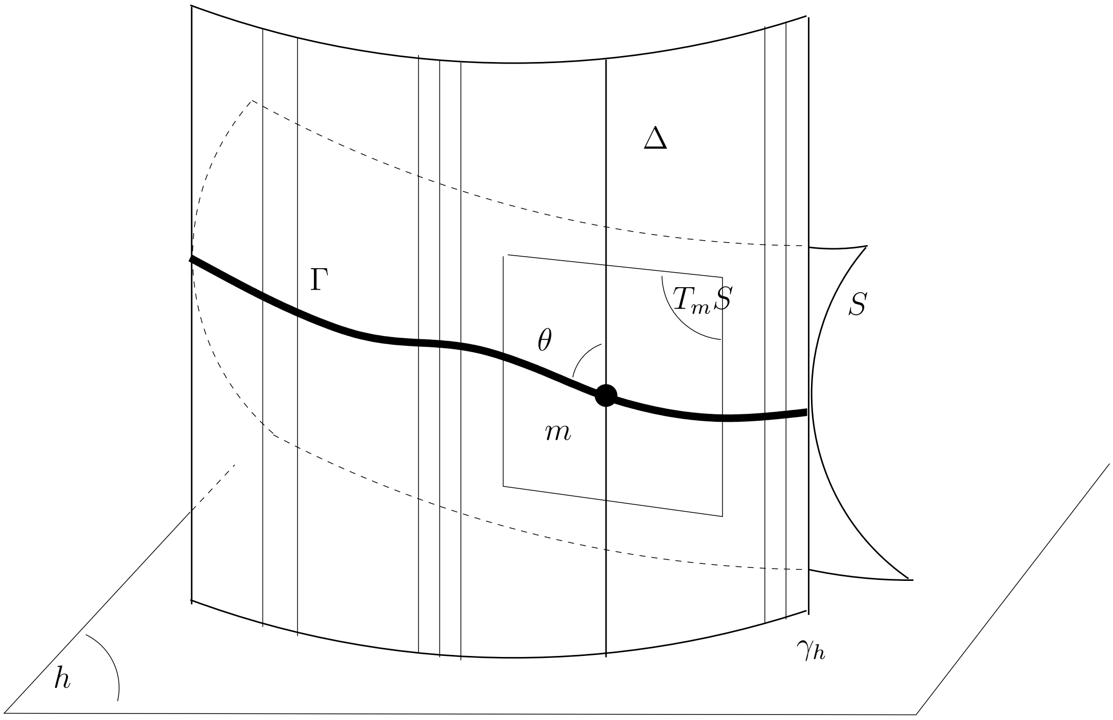


Figure 12: Projection sur un plan h contenant $\mathcal{N}(m)$ et courbe polaire Γ_h.

direction principale est éclairée par le théorème suivant démontré par d'Ocagne en 1895 [0c].

Théorème 4.4.3 *Le produit de la courbure k en m du lieu critique γ_h par la courbure $k(m, h^\perp)$ de la section de la surface par le plan normal en m contenant $h^\perp$ est égal à la courbure de Gauss $K = k_1 \cdot k_2$ de la surface en m.*

Dans le cas où h contient une direction principale, la courbure de la section normale $S \cap \mathcal{N}(m) \oplus h^\perp$ est une courbure principale, tandis que la courbure de γ_h au point projection de m est égale à l'autre courbure principale.

Lorsque la surface est une quadrique, la détermination des lignes de courbure est facilitée par le fait que les courbes Γ_h sont planes. Le calcul explicite des équations des lignes de courbure sur un ellipsoïde a été fait par Monge en 1795 [Mo5].

4.5 Applications à la gravure et à la taille des pierres.

À la fin du cours de géométrie descriptive, Monge conseille au graveur d'indiquer les lignes de courbure des surfaces qu'il représente afin de donner du relief. Rappelons que pour une surface de révolution, ces lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles, représenter ces derniers est une façon classique d'indiquer la symétrie de révolution.

Il observe aussi que pour tailler un voussoir (pierre servant à la confection d'une voûte, voir figure 13) il convient, non seulement de tailler les joints de façon à ce qu'ils forment une surface réglée normale à la douelle (face apparente du voussoir), mais encore de les construire le long d'une ligne de courbure de la douelle pour qu'ils forment une surface développable. À notre sens, le résultat d'une taille est en première approximation une surface développable puisque chaque coup de ciseau détermine un plan. Si les droites caractéristiques de cette surface développable ne sont pas normales à la douelle, il faudrait frapper en biais et non perpendiculairement à la douelle pour obtenir cette surface, ce qui ne parait pas pratiquement réalisable. Le raccordement de frappes normales le long d'une courbe quelconque risquerait, lui, de produire une surface moins régulière. Il y a peut-être aussi une raison esthétique, puisque le dessin des joints soulignera le relief de la voute.

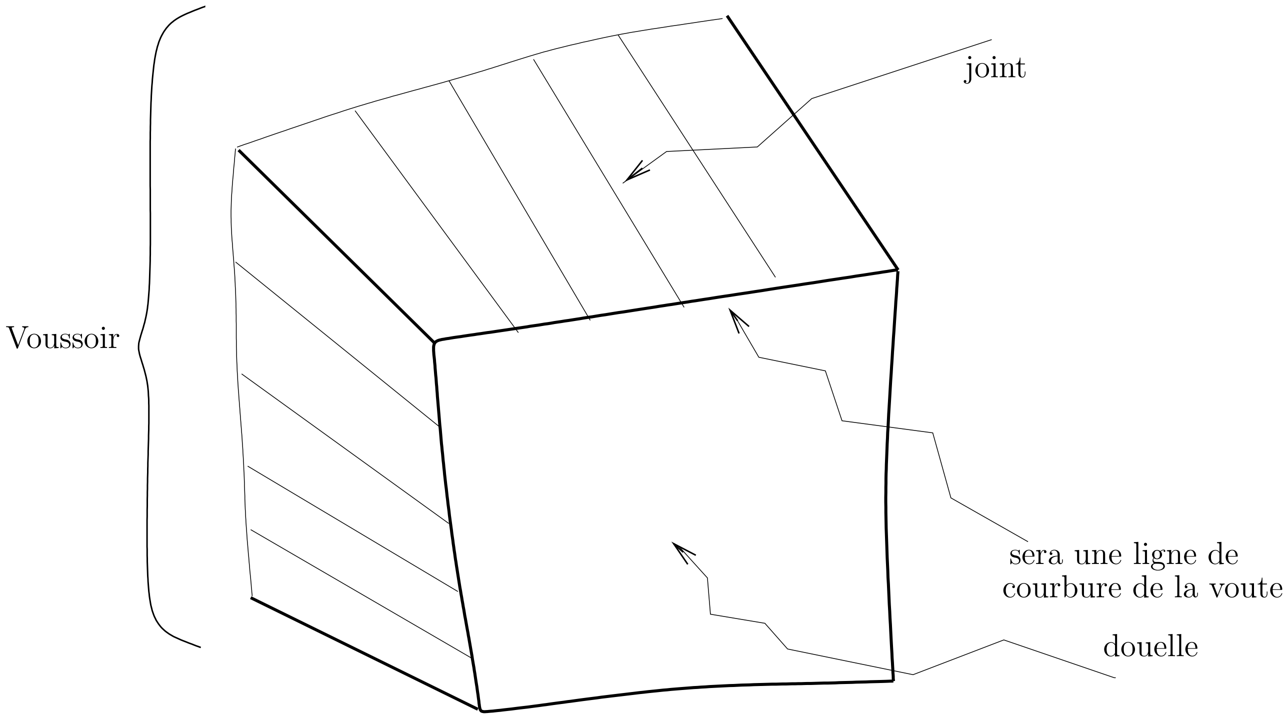


Figure 13: Voussoir, douelle et joints

5 Appendice : Quelques travaux et activités non mathématiques de Monge

L'œuvre scientifique de Monge ne se borne pas à la démontrations de quelques théorèmes. Il s'est intéressé aussi à la physique, à la chimie, à l'organisation de la production de l'acier, à l'interprétation des mirages etc. Cette ouverture d'esprit aussi explique l'effort didactique qu'il fait souvent pour présenter de manière imagée et compréhensible par son public des notions neuves.

Nous en donnons ci-dessous quelques exemples.

- 1764 Plan de la ville de Beaune.
- 1773 Réflexion sur un tour de cartes (mémoire de l'académie).
- 1774 Construction d'un cadran solaire.

  - Mesures d'altitude à l'aide d'un baromètre dans les Pyrénnées (avec d'Arcet).
- 1781 Sur les propriétés de la matière calcaire...
- 1782 Mémoire sur la conversion du bleu de Prusse en fluide élastique.

  - Note sur les expériences de Monsieur de Volta sur l'electricité, séance de l'académie du 1^0 Mars.
- 1783 Synthèse de l'eau quelques mois après Cavendish (indépendemment).
- 1785 Mémoire sur quelques observations relatives à la composition de l'acide nitreux lu à l'académie le 5 Mars.
- 1786 Mémoire sur le fer dans ses différents états métalliques (académie des sciences de Paris).

  - Essai d'une explication de la double réfraction qu'éprouve la lumière en passant au travers du cristal d'Islande, lu à l'académie le 27 Avril.

- 1787 Enquête sur la situation de la fonderie et de la verrerie au Creusot
- 1790 Mémoire sur le mécanisme du feutrage ; Monge en déduit par le raisonnement la structure microscopique des cheveux.

  - Mémoire sur la cause des principaux phénomènes de la météorologie (annales de chimie).
- 1793 Organisation de la défense du territoire auprès du comité de salut public.

  - Le comité de salut public charge Monge, Berthollet et Vandermonde de la rédaction d'un ouvrage sur la fabrication pratique de l'acier de forge et la cémentation.

  - Avis aux ouvriers en fer sur la fabrication de l'acier (Berthollet, Monge, Vandermonde).
- 1794 Programmes de cours, en particulier pour l'École Polytechnique.
- 1798 Explication du phénomène du mirage ($2^{ème}$ séance de l'Institut d'Egypte).
- 1800 Notice sur la fabrication du fromage de Lodézan (Parmesan) (Annales de chimie t. 17).
- 1804 Rapport sur un projet de descente en Angleterre en montgolfière.
- 1809 Équation des cordes vibrantes. Journal de l'École Polytechnique, XV^{eme} cahier, tome $VIII$ p. 68-117.

References

[Ca] M. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice Hall (1976).

[Eu1] L. Euler. *Recherches sur la courbure des surfaces,* Mémoires de l'académie des sciences de Berlin **[16]** (1760), 1767, p.119-143; in Opera omnia I 28, Commentationes geometricae Lausanne 1955 p .1-22.

[Fre] A. Frézier. *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires ou Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture,* Strasbourg, 1737-1738-1739, 3 vol; in 4^0 ; 2^e éd., (1769).

[Ga] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas,*Comment. Soc. Gott. recent. t. 6 Göttingen (1828) p. 99-146, traduction française *Recherche générales sur les surfaces courbes* par E. Roger, Albert Blanchard, Paris (1967).

[Ma] P. Martin. Collection U, Armand Colin 1967.

[Mo1] Gaspard Monge. *Cours de géométrie descriptive* École Normale an III, réédition J. Gabay (1989).

[Mo1bis] Gaspard Monge. *Cours de géométrie descriptive augmenté d'une théorie des ombres et de la perspective,* extraite des papiers de l'auteur par M. Brisson, (1827) Bachelier, Paris.

[Mo2] Gaspard Monge (attribué à). *Avant-propos ; Stéréotomie,* Journal polytechnique ou bulletin du travail, fait à l'Ècole Centrale des Travaux publics, publié par le conseil d'instruction et administration de cette école, premier cahier, Germinal an III.

[Mo3] Gaspard Monge. *Mémoire sur la théorie des déblais et remblais,* Mémoire de l'académie des sciences de Paris (1781).

[Mo4] Gaspard Monge. *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres,* Mem. div. Sav. t.9 p. 382-440.

[Mo5] Gaspard Monge. *Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde,*Journal de l'école polytechnique II^{ème} cahier, cours de Floréal an III p. 145.

[Mo6] Gaspard Monge. *Application de l'Algèbre à la géométrie à l'usage de l'école impériale polytechnique,* (avec Hachette) Bernard, Paris (1805).

[Meu] J-B. M-C. Meusnier. *Mémoire sur la courbure des surfaces,* Mem. div. sav. t. X Paris 1785, p. 477-510.

[Pa] François Pairault. *Gaspard Monge, le fondateur de Polytechnique,* Taillandier Paris (2000).

[0c] d'Ocagne. *Sur la courbure du contour apparent d'une surface projetée orthogonalement,* Nouvelles annales de mathématiques de l'École Polytechnique (1895) p. 262-292.

[Ta] René Taton. *L'œuvre scientifique de Monge,* P.U.F. Paris (1951).