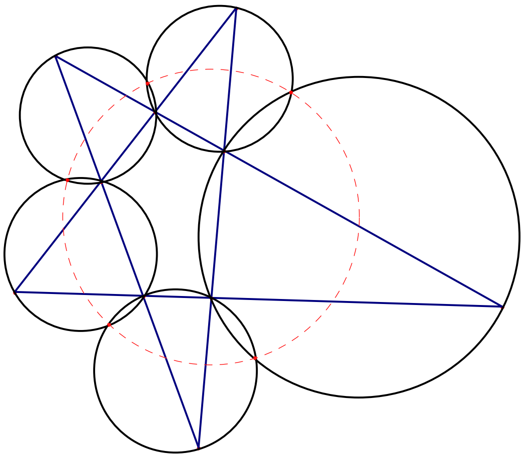
Problème des 5 cercles

L'objectif de ce texte est de montrer le résultat suivant : on considère un pentagone étoilé ABCDE. Soient $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \mathrm{S}_4$ et S_5 les cercles circonscrits aux triangles définis par les « branches » du pentagone. Alors les points d'intersection de chacun de ces cercles avec le suivant sont cocycliques (on prend bien sûr les points d'intersection autres que les sommets du pentagone intérieur).



Cette propriété, en apparence assez mystérieuse, s'inscrit dans un cadre bien plus général : à un nombre n quelconque de droites du plan, on associe un point ou un cercle selon la parité de n. Tous ces résultats de géométrie classique sont dûs au géomètre anglais William Kingdon Clifford (voir [4] pour la preuve originale), et démontrés de manière accessible dans [1]. Ce problème est redevenu « à la mode » récemment dans des circonstances assez particulières : il fut posé par le président chinois Yang Zemin à un parterre d'éminents mathématiciens au cours du congrès international des mathématiciens (Pékin, août 2002). C'est ainsi que ce problème a obtenu une certaine célébrité : il est ainsi cité par Alain Connes dans le cadre du séminaire Poincaré (octobre 2002).

1 Quelques résultats dans le plan complexe

Le plan sert de modèle pour représenter les nombres complexes. Inversement, tout point M du plan peut donc être « codé » par un complexe z, qu'on appelle son *affixe*. Dans toute la suite, on identifiera donc complexes et points du plan.

1.1 Points cocycliques et alignés

Propriété 1.1 *L'angle α à l'origine entre les deux droites passant par les points z et z' est donné par la formule :*

$$\alpha = \arg(z') - \arg(z) = \arg(z'/z)$$

Par translation, on en déduit que l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{z_1z_2}$ et $\overrightarrow{z_1z_3}$ est :

$$\left(\overrightarrow{z_1z_2}, \overrightarrow{z_1z_3}\right) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$$

Définition On définit le *birapport* de quatre complexes z_1, z_2, z_3 et z_4, que l'on note $\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, z_4)$, comme le nombre :

$$\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) : \left(\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right)$$

Théorème 1.2 *Les quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si le birapport $\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est réel.*

Démonstration : En effet la condition pour que les quatre points soient cocycliques ou alignés s'écrit (par exemple) :

$$\left(\overrightarrow{z_3z_2}, \overrightarrow{z_3z_1}\right) - \left(\overrightarrow{z_4z_2}, \overrightarrow{z_4z_1}\right) = 0 \text{ ou } \pi$$

D'après la propriété 1.1, on a

$$\left(\overrightarrow{z_3z_2}, \overrightarrow{z_3z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{z_4z_2}, \overrightarrow{z_4z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right)$$

Leur différence est donc $\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) - \arg\left(\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right) = \arg\left(\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, z_4)\right)$

On obtient la condition annoncée, car le complexe $\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ a pour argument 0 ou π si et seulement si il est réel.

□

N.B. Le cas z_1, z_2, z_3 et z_4 alignés correspond au cas où les angles $\left(\overrightarrow{z_3z_1}, \overrightarrow{z_3z_2}\right)$ et $\left(\overrightarrow{z_4z_1}, \overrightarrow{z_4z_2}\right)$ sont eux-même égaux à 0 ou π, c'est-à-dire que les complexes $\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)$ et $\left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right)$ sont tous deux réels, donc de rapport réel.

1.2 Un point à l'infini

Afin d'unifier nos notations, nous allons rajouter au plan complexe un point ∞, qui correspond à un « point à l'infini », par lequel en particulier passent toutes les droites.

Celui-ci permet d'étendre à $\mathbb{C}$ tout entier la notion d'inverse, si l'on pose $\infty = 1/0$. On étend les opérations sur les complexes à notre nouveau nombre en posant :

$$\forall z, \quad z + \infty = \infty \qquad\qquad \forall z \neq 0, \quad z \times \infty = \infty$$

$$\forall z \neq \infty, \quad z - \infty = \infty, \quad \infty/z = \infty \quad \text{et} \quad z/\infty = 0$$

N.B. Lorsque a, b, c et d sont quatre nombres complexes, on identifie le rapport $(a \times \infty + b) \,/\, (c \times \infty + d)$ au complexe a/c. Ceci notamment car pour tout complexe z non nul, on a $(az+b)/(cz+d) = (a+b/z)/(c+d/z)$. Et comme $b/\infty = d/\infty = 0$ d'après nos règles d'opérations, on trouve bien la valeur a/c. Cette explication manque bien sûr de rigueur : en réalité l'introduction de ce point à l'infini correspond au passage de $\mathbb{C}$ à la droite projective complexe $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ (cf le texte « homographies et suites récurrentes », ou bien sûr [3] pour une introduction plus rigoureuse). Ceci-dit, tout ce qui suit pourrait être fait sans utiliser ce point à l'infini, en distinguant soigneusement plusieurs cas à chaque fois...

Avec ces notations, on obtient une condition plus simple pour que trois points z_1, z_2, z_3 soient alignés :

Propriété 1.3 *Les points z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si le birapport $\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, \infty)$ est réel.*

Démonstration : D'après les règles précédemment définies, on calcule

$$\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, \infty) = \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) : \left(\frac{z_1 - \infty}{z_2 - \infty}\right)$$

Comme le rapport $\left(\dfrac{z_1 - \infty}{z_2 - \infty}\right)$ est égal à 1, on trouve

$$\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, \infty) = \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)$$

Or les trois points z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si l'angle $\left(\overrightarrow{z_3 z_1}, \overrightarrow{z_3 z_2}\right)$ est égal à 0 ou π, c'est-à-dire si le complexe $\left(\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)$ est réel.

□

Ce résultat justifie pleinement la convention adoptée sur le point ∞ : dans le plan complexe, le point ∞ est un point par lequel passent toutes les droites. En effet, on a vu que quatre complexes sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel. Et comme trois points z_1, z_2, z_3 alignés correspondent à un birapport $\mathrm{W}(z_1, z_2, z_3, \infty)$ réel, il est naturel de supposer le point ∞ aligné avec z_1, z_2 et z_3, ce pour tout triplet (z_1, z_2, z_3) de points alignés.

2 Des problèmes de cercles

2.1 Condition de cocyclicité

Théorème 2.1 (Miquel) *Soient $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3$ et S_4 quatre cercles du plan, tels que S_1 coupe S_2 en deux points z_1 et w_1, qui coupe S_3 en deux points z_2 et w_2, qui coupe S_4 en deux points z_3 et w_3, qui coupe S_1 en deux points z_4 et w_4.*

Si les quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 sont alignés ou cocycliques, alors il en va de même pour les points w_1, w_2, w_3 et w_4.

Démonstration : Nous allons bien sûr utiliser le critère précédent du birapport. Par construction, les quatre points z_1, z_2, w_1 et w_2 sont sur le cercle S_2, donc cocycliques. D'après le théorème 1.2, le birapport $\mathrm{W}(z_1, w_2, z_2, w_1)$ est réel.

Appliquant le même critère aux quatre cercles, on sait que les birapports suivants sont réels :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}(z_1, w_2, z_2, w_1) &= \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} : \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1} \\
\mathrm{W}(z_2, w_3, z_3, w_2) &= \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} : \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2} \\
\mathrm{W}(z_3, w_4, z_4, w_3) &= \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} : \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3} \\
\mathrm{W}(z_4, w_1, z_1, w_4) &= \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} : \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}
\end{aligned}$$

L'expression $\dfrac{\mathrm{W}(z_1, w_2, z_2, w_1) \cdot \mathrm{W}(z_3, w_4, z_4, w_3)}{\mathrm{W}(z_2, w_3, z_3, w_2) \cdot \mathrm{W}(z_4, w_1, z_1, w_4)}$ est donc elle-même réelle.

Elle se simplifie en $\quad \dfrac{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3) \cdot (z_4 - z_1)} \cdot \dfrac{(w_2 - w_1) \cdot (w_4 - w_3)}{(w_3 - w_2) \cdot (w_1 - w_4)}$

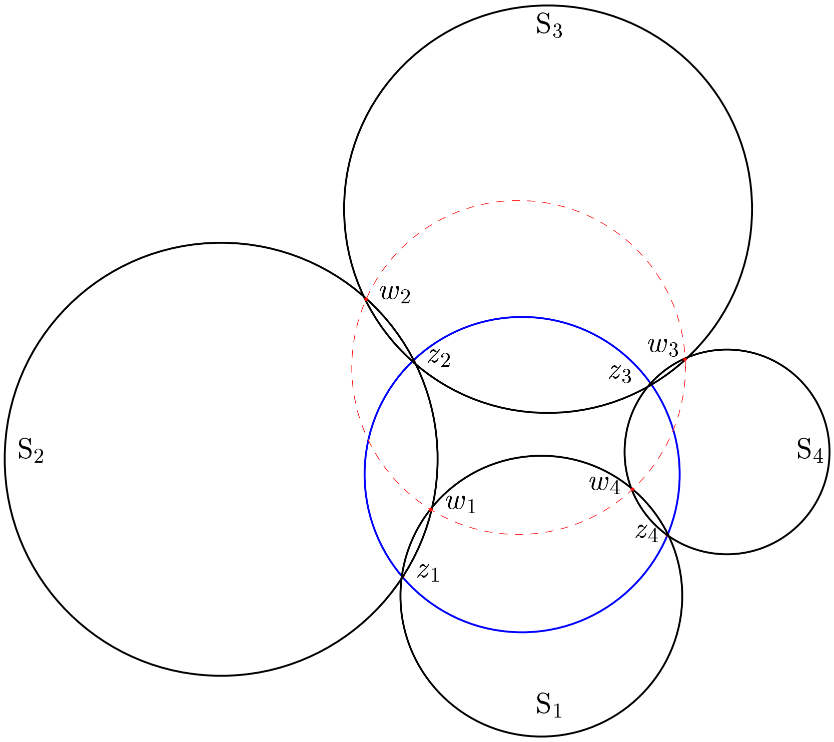
c'est-à-dire $\quad \left(\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right)\left(\dfrac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} : \dfrac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4}\right)$

On reconnaît dans cette dernière expression le produit :

$$\mathrm{W}(z_1, z_3, z_2, z_4)\mathrm{W}(w_1, w_3, w_2, w_4)$$

qui est donc réel. Mais alors, si les points z_1, z_2, z_3 et z_4 sont cocycliques ou alignés, le birapport $\mathrm{W}(z_1, z_3, z_2, z_4)$ est réel d'après le théorème 1.2. Il en va alors de même pour le birapport $\mathrm{W}(w_1, w_3, w_2, w_4)$, ce qui se traduit, toujours grâce au théorème 1.2, par le fait que les quatre points w_1, w_2, w_3 et w_4 sont cocycliques ou alignés. (voir également [2] pour d'autres démonstrations).

$\square$



N.B. Dans cette preuve, on n'a pas entièrement utilisé les hypothèses : on dit que les quatre points z_1, z_2, w_1 et w_2 sont sur le cercle S_2, donc cocycliques, et donc le birapport $\mathrm{W}(z_1, w_2, z_2, w_1)$ est réel. En réalité, on n'utilise ensuite que cette dernière propriété, ce qui signifie que S_2 pourrait aussi bien être une droite ! Il en va bien sûr de même pour $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_3$ et S_4. Enfin, deux droites non parallèles ne se coupent *a priori* qu'en un seul point du plan complexe. Mais elles passent toutes deux par le point ∞, qui définit une seconde intersection. D'où la formulation plus générale suivante :

Théorème 2.2 *Soient* $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3$ *et* S_4 *quatre* ***cercles ou droites*** *du plan, tels que* S_1 *coupe* S_2 *en deux points* z_1 *et* w_1*, qui coupe* S_3 *en deux points* z_2 *et* w_2*, qui coupe* S_4 *en deux points* z_3 *et* w_3*, qui coupe* S_1 *en deux points* z_4 *et* w_4*.*

Si les quatre points z_1, z_2, z_3 *et* z_4 *sont alignés ou cocycliques, alors il en va de même pour les points* w_1, w_2, w_3 *et* w_4*.*

N.B. On a supposé les cercles (ou droites) sécants. Que se passe-t'il donc lorsque deux d'entre eux sont tangents (resp. parallèles) ? Géométriquement, on s'aperçoit que c'est un cas limite par rapport aux précédents, lorsque l'on fait varier l'un de ces cercles (ou droites). En effet, supposons que l'on fait varier le cercle S_1 de façon à ce que les points z_1 et z_4 soient fixes, que seuls varient w_1 et w_4. On peut alors exprimer w_4 comme une fonction continue de w_1. Le produit $\mathrm{W}(z_1, z_3, z_2, z_4)\mathrm{W}(w_1, w_3, w_2, w_4)$, toujours réel, est alors une fonction continue de w_1. Lorsque w_1 tend vers z_1, il tend donc vers une quantité réelle. Or les points z_1, z_2, z_3 et z_4 n'ont pas bougé, donc le birapport $\mathrm{W}(z_1, z_3, z_2, z_4)$ est toujours réel dans la position limite $w_1 = z_1$. Et donc le birapport $\mathrm{W}(w_1, w_3, w_2, w_4)$ est alors lui aussi réel.

Les résultats qui suivent, dûs au géomètre anglais William Kingdon Clifford, ne sont rien d'autre que des applications plus ou moins directes de ce théorème.
Définition On dira qu'un ensemble de droites est *en position générale* lorsqu'elles sont deux à deux sécantes, c'est-à-dire lorsque l'on ne peut en trouver deux parallèles, et lorsqu'on ne peut en trouver trois concourrantes. (C'est la situation la plus « quelconque » : il n'y a aucune propriété remarquable sur les positions respectives de ces droites.)

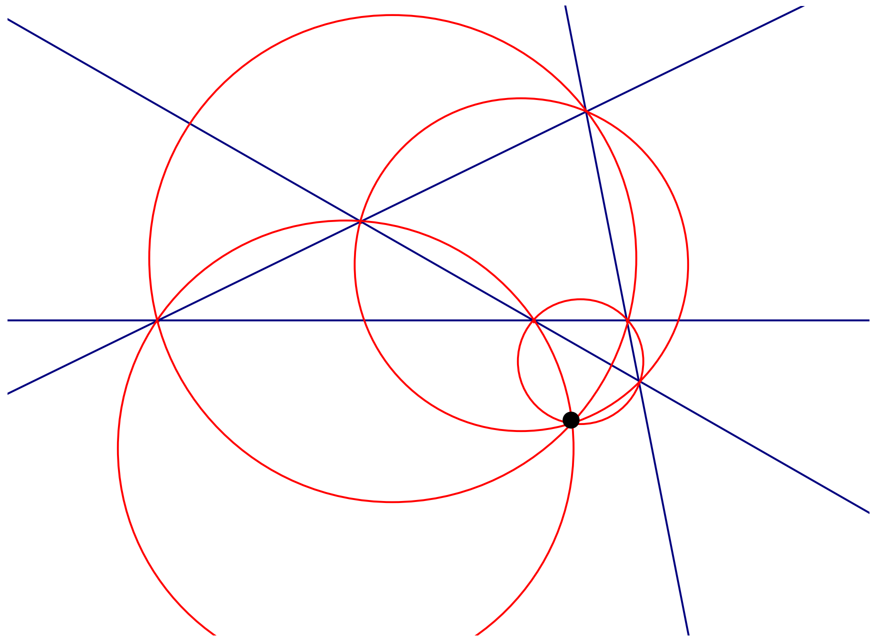
2.2 Un point pour quatre droites

Théorème 2.3 *Soient quatre droites en position générale. Alors les cercles circonscrits aux quatre triangles définis par ces droites sont concourrants.*

(Les quatre triangles en question sont bien sûr les triangles obtenus en choisissant trois droites parmi les quatre. Il y a en effet quatre façons de ce faire.)

Démonstration : Soient $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3$ et D_4 nos quatre droites, en position générale (donc deux à deux sécantes). Pour $i < j$, on note $z_{i,j}$ le point d'intersection des droites D_i et D_j. Et, pour $1 \leq i < j < k \leq 4$ trois indices distincts, on note $\mathrm{S}_{i,j,k}$ le cercle circonscrit au triangle défini par les droites $\mathrm{D}_i, \mathrm{D}_j$ et D_k, c'est-à-dire le triangle $z_{i,j}z_{i,k}z_{j,k}$.

Avec ces notations, on cherche à montrer le résultat suivant : les cercles $\mathrm{S}_{1,2,3}, \mathrm{S}_{1,2,4}, \mathrm{S}_{1,3,4}$ et $\mathrm{S}_{2,3,4}$ sont concourants.



Tout d'abord, les droites D_3 et D_4 n'étant pas parallèles, les cercles $S_{1,2,3}$ et $S_{1,2,4}$, qui ont le point $z_{1,2}$ en commun, ne peuvent être tangents (sinon, par une homothétie de centre $z_{1,2}$, on montre que les droites D_3 et D_4 doivent être parallèles.)

Notons $z_{1,2,3,4}$ le second point d'intersection de $S_{1,2,3}$ et $S_{1,2,4}$. Nous allons montrer que les deux derniers cercles, $S_{1,3,4}$ et $S_{2,3,4}$, passent eux aussi par ce point. Ce n'est ni plus ni moins qu'un application presque immédiate du théorème 2.2.

On considère les quatre « cercles ou droites » suivants : $S_{1,2,3}$, D_3, D_4 et $S_{1,2,4}$. En effet

- $S_{1,2,3}$ coupe D_3 en deux points $z_{1,3}$ et $z_{2,3}$.
- D_3 « coupe » D_4 en ∞ et $z_{3,4}$.
- D_4 coupe $S_{1,2,4}$ en $z_{1,4}$ et $z_{2,4}$.
- Enfin $S_{1,2,4}$ coupe $S_{1,2,3}$ en $z_{1,2}$ et $z_{1,2,3,4}$.

Comme les quatre points $z_{1,3}$, ∞, $z_{1,4}$ et $z_{1,2}$ sont alignés (sur la droite D_1), les quatre points $z_{2,3}$, $z_{3,4}$, $z_{2,4}$ et $z_{1,2,3,4}$ sont alignés ou cocycliques. Or les trois premiers sont distincts et sur le cercle $S_{2,3,4}$. Nécessairement, le point $z_{1,2,3,4}$ est donc sur le cercle $S_{2,3,4}$.

De même, les quatre points $z_{2,3}$, ∞, $z_{2,4}$ et $z_{1,2}$ sont alignés (sur la droite D_2), donc les points $z_{1,3}$, $z_{3,4}$, $z_{1,4}$ et $z_{1,2,3,4}$ sont alignés ou cocycliques, c'est-à-dire que $S_{1,3,4}$ passe par le point $z_{1,2,3,4}$. Et donc les quatre cercles sont concourants, au point $z_{1,2,3,4}$.

□

N.B. On aurait aussi pu conclure par un argument de symétrie : les cercles $S_{1,2,3}, S_{1,2,4}$ et $S_{2,3,4}$ sont concourants, c'est-à-dire que trois des cercles parmi les quatre cercles considérés sont concourants. Bien sûr, ceci est valable pour tout triplet de ces cercles (nous n'avons pas fait d'hypothèse particulière distinguant les quatre droites). Et donc, en réalité, les quatre cercles sont concourants.

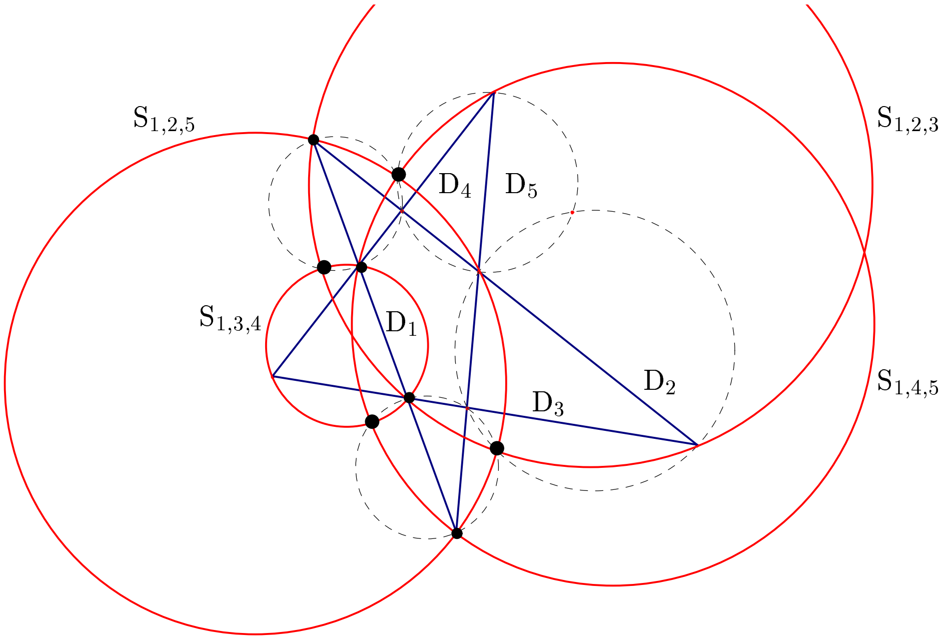
Définition On appellera *point central* de quatre droites D_1, D_2, D_3 et D_4 en position générale, et on le notera $z_{1,2,3,4}$, le point d'intersection des quatre cercles circonscrits aux triangles définis par chaque triplet de ces droites.

2.3 Un cercle pour cinq droites

Théorème 2.4 *Soient cinq droites* $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4$ *et* D_5 *en position générale. Alors les cinq points centraux des cinq quaduplets possibles formés à partir de ces droites sont cocycliques ou alignés.*

Démonstration : Reprenant les notations du théorème précédent, on appelle $z_{1,2,3,4}, z_{1,2,3,5}, z_{1,2,4,5}, z_{1,3,4,5}$ et $z_{2,3,4,5}$ ces cinq points centraux. Bien sûr, il suffit de montrer que quatre quelconques d'entre eux sont cocycliques, par exemple les quatre premiers. Or ces points sont obtenus respectivement comme des intersections de cercles :

– $z_{1,2,3,4}$ est intersection des cercles $\mathrm{S}_{1,3,4}$ et $\mathrm{S}_{1,2,3}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,3}$.
– $z_{1,2,3,5}$ est intersection des cercles $\mathrm{S}_{1,2,3}$ et $\mathrm{S}_{1,2,5}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,2}$.
– $z_{1,2,4,5}$ est intersection des cercles $\mathrm{S}_{1,2,5}$ et $\mathrm{S}_{1,4,5}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,5}$.
– $z_{1,3,4,5}$ est intersection des cercles $\mathrm{S}_{1,4,5}$ et $\mathrm{S}_{1,3,4}$, l'autre intersection étant le point $z_{1,4}$.



Comme les quatre autres points ainsi définis ($z_{1,3}$, $z_{1,2}$, $z_{1,5}$ et $z_{1,4}$) sont alignés (ils sont tous quatre sur la droite D_1), le théorème 2.2 nous permet d'affirmer que nos quatre points sont alignés ou cocycliques.
Ceci étant vrai pour toute combinaison de quatre points parmi les cinq points centraux, les cinq points centraux sont donc alignés ou cocycliques.

□

Corollaire 2.5 *Les intersections des cercles circonscrits aux triangles externes successifs d'une étoile à cinq branches sont cocycliques.*

Démonstration : C'est en effet un cas particulier du résultat précédent : deux branches successives correspondent au choix de quatre droites sur les cinq qui portent les côtés du pentagone étoilé. L'intersection des cercles circonscrits aux deux branches est donc le point central des quatre droites en question.

Et d'après notre théorème, les cinq points centraux sont cocycliques ou alignés... Or dans ce cas précis, on s'aperçoit géométriquement qu'ils ne peuvent être alignés. Ils sont donc cocycliques.

□

2.4 Cas général : n droites

Si l'on résume les résultats précédents, on s'aperçoit que ;

- Deux droites en position générales définissent un point : leur intersection.
- Trois droites en position générales définissent un cercle : le cercle circonscrit au triangle qu'elles définissent.
- Quatre droites en position générales définissent un point : l'intersection des quatre cercles circonscrits aux quatre triangles (théorème 2.3).
- Cinq droites en position générales définissent un cercle : le cercle passant par les cinq poits centraux des quadruplets de droites (théorème 2.4).

Continuant ainsi, on est tenté de supposer qu'un nombre pair de droites définissent un « point central », et qu'un nombre impair de droites définissent un « cercle central ». (Par cercle, on entendra désormais tout objet de type cercle ou droite, ce qui permet d'éviter de distinguer systématiquement plusieurs cas. Le résultat marche alors dans le cas d'une seule droite : une droite détermine un cercle, à savoir la droite elle-même.) C'est effectivement le cas, au sens suivant :

Théorème 2.6 *Tout système de n droites en position générale, avec n pair, détermine un point central, qui est l'intersection des cercles centraux des n systèmes possibles de $n-1$ de ces droites.*

Tout système de n droites en position générale, avec n impair, détermine un cercle central, qui passe par les points centraux des n systèmes possibles de $n-1$ de ces droites.

Démonstration : La preuve se fait bien sûr par récurrence sur n. Soit donc n un entier supérieur ou égal à 6 (le résultat étant déjà établi pour $n \leq 5$), et supposons le théorème vrai pour tout entier strictement inférieur à n.

Soient $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n$ un système de n droites en position générale. Au lieu d'indicer les points et cercles par les droites qu'ils mettent en jeu, on va cette fois les indicer par les droites qu'il ne mettent pas en jeu.

Cas 1 : n impair

On note donc z_i le point central des $n-1$ droites $\mathrm{D}_1, \ldots \mathrm{D}_{i-1}, \mathrm{D}_{i+1}, \ldots, \mathrm{D}_n$, on note $\mathrm{S}_{i,j}$ le cercle central des $n-2$ droites $(\mathrm{D}_k)_{k \neq i,j}$, et ainsi de suite. L'intérêt de cette notation est que le point z_i, point central des droites $(\mathrm{D}_j)_{j \neq i}$, est par hypothèse de récurrence l'intersection des cercles centraux des systèmes de $n-2$ droites contenus dans le système $(\mathrm{D}_j)_{j \neq i}$, c'est-à-dire l'intersection des cercles $\mathrm{S}_{i,j}$ $(i \neq j)$. De la même façon, le cercle $\mathrm{S}_{i,j}$ contient les points $z_{i,j,k}$ $(k \neq i, j)$, le point $z_{i,j,k}$ est l'intersection des cercles $\mathrm{S}_{i,j,k,l}$ $(l \neq i, j, k)$, etc.

Il s'agit ici de montrer que les points $(z_i)_{i \leq n}$ sont cocycliques. Pour ceci, il suffit de montrer qu'ils sont cocycliques quatre à quatre. Nous allons donc montrer que z_1, z_2, z_3 et z_4 le sont.

Mais ces points peuvent être exprimés comme des intersections de cercles :
- z_1 est intersection des cercles $S_{1,4}$ et $S_{1,2}$, dont l'autre intersection est $z_{1,2,4}$.
- z_2 est intersection des cercles $S_{1,2}$ et $S_{2,3}$, dont l'autre intersection est $z_{1,2,3}$.
- z_3 est intersection des cercles $S_{2,3}$ et $S_{3,4}$, dont l'autre intersection est $z_{2,3,4}$.
- z_4 est intersection des cercles $S_{3,4}$ et $S_{1,4}$, dont l'autre intersection est $z_{1,3,4}$.

Comme les points $z_{1,2,4}, z_{1,2,3}, z_{2,3,4}$ et $z_{1,3,4}$ sont cocycliques (ils sont situés sur le cercle $S_{1,2,3,4}$), il en va de même pour nos points z_1, z_2, z_3 et z_4 d'après le théorème 2.2.

Cas 2 : n pair

Il s'agit de montrer que les n cercles centraux $S_1, \dots S_n$ des n systèmes de $n-1$ droites possibles sont concourants (S_i désigne le cercle central des droites $(D_j)_{j \neq i}$). Pour cela, il suffit de montrer qu'ils sont concourants trois par trois. On s'intéresse par exemple aux cercles S_1, S_2 et S_3.

Les cercles S_1 et S_2 sont sécants en $z_{1,2}$. Soit z leur seconde intersection. Considérons les cercles $S_1, S_{1,3,4}, S_{2,3,4}$ et S_2.
- S_1 et $S_{1,3,4}$ se coupent en $z_{1,4}$ et en $z_{1,3}$.
- $S_{1,3,4}$ et $S_{2,3,4}$ se coupent en $z_{1,2,3,4}$ et en $z_{3,4}$.
- $S_{2,3,4}$ et S_2 se coupent en $z_{2,4}$ et en $z_{2,3}$.
- S_2 et S_1 se coupent en $z_{1,2}$ et en z.

Comme les points $z_{1,4}, z_{1,2,3,4}, z_{2,4}$ et $z_{1,2}$ sont cocycliques (ils sont situés sur le cercle $S_{1,2,4}$), il en va de même pour nos points $z_{1,3}, z_{3,4}, z_{2,3}$ et z d'après le théorème 2.2. C'est-à-dire que z est sur le cercle qui contient $z_{1,3}, z_{3,4}$ et $z_{2,3}$, c'est-à-dire S_3.

$\square$

Références

[1] I. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, 1968.

[2] M. Audin, *Géométrie*, Belin, 1998.

[3] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Gauthier-Villars, 1931.

[4] W. K. Clifford, « Synthetic proof of Miquel's theorem » pp 38-54 in *Mathematical papers*, Macmillan and co., 1882.