# Du Triangle de Pascal aux Séries Formelles

Farouk Boucekkine

http://dma.ens.fr/culturemath

Les suites de Fibonacci, le nombre de parenthésages « légaux » possibles avec $2n$ parenthèses, le profil des montagnes...Ces sujets on un rapport, dans le monde des mathématiques !

Il existe en effet une manière assez générale d'étudier des suites dont la définition fait apparaître (clairement ou après analyse), des phénomènes de récurrence. Cette méthode consiste à introduire une *série formelle* associée à la suite et d'étudier cet objet de manière combinatoire.

Ce texte a pour but d'introduire cette notion, qui généralise celle de *polynôme* en autorisant les degrés infinis. Nous verrons que cet objet algébrique permet d'effectuer des manipulations combinatoires sans passer par le traitement analytique de la notion de somme infinie. Nous verrons également que ces manipulations doivent être effectuées avec prudence, et uniquement dans un cadre clairement établi.

Pour commencer, revenons sur l'exemple des coefficients binômiaux, qui nous montrent l'intérêt de considérer un objet polynômial pour étudier une suite.

## Table des matières

**1 L'exemple du triangle de Pascal** **2**
- 1.1 Rappels sur les $C_n^k$ . . . . . 2
- 1.2 Analyse du problème . . . . . 3
- 1.3 Introduisons $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . X^k$ . . . . . 3
- 1.4 Le calcul de $C_n^k$ . . . . . 4
- 1.5 Conclusion . . . . . 4

**2 Séries formelles** **5**
- 2.1 Définition et premières propriétés . . . . . 5
- 2.2 Séries formelles égales à une fraction rationnelle . . . . . 7
- 2.3 Une généralisation partielle . . . . . 9
- 2.4 Différences et liens entre *égalité formelle* et *égalité fonctionnelle* . 9

**3 Un grand classique : la suite de Fibonacci** **10**
- 3.1 La suite de Fibonacci . . . . . 10
- 3.2 Un autre exemple du même genre . . . . . 12

**4 Des parenthèses aux montagnes : les nombres de Catalan** **12**
4.1 Les nombres de Catalan . . . . . 12
4.2 Chemins de Dyck . . . . . 13
4.3 De la relation de récurrence à la série formelle . . . . . 15

**5 Conclusion** **16**

# 1 L'exemple du triangle de Pascal

Nous allons examiner cet exemple sous toutes ses coutures. Il a l'avantage d'être connu et de faire lien entre diverses notions vues au lycée. Le principe de cette section est de partir de la définition ensembliste et d'obtenir la formule $C_n^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$ en introduisant le polynôme $\sum_{k=0}^{n} C_n^k.X^k$, dont on montre au passage qu'il est égal à $(1+X)^n$.

## 1.1 Rappels sur les $C_n^k$

**Définition 1.1** *$C_n^k$ est le nombre de sous-ensembles à $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments. Ces nombres ont un certain nombre de propriétés, dont nous rappelons certaines :*

**Propriétés 1.2** *On a :*
*(i)* $C_n^{n-k} = C_n^k$
*(ii)* $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
*(iii)* $C_n^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$

**Remarque 1.3** *la propriété $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ permet d'obtenir facilement les $C_n^k$ en les disposant dans le « Triangle de Pascal », en partant de $C_0^0 = 1$ et $C_n^k = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$ (les $k$ en abscisse et les $n$ en ordonnée) :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
etc\ldots & & & & & & & &
\end{array}$$

Pour montrer la dernière propriété, nous allons commencer par montrer les 2 premières, puis nous allons introduire les polynômes $P_n$ définis par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.X^k$$

et effectuer un travail sur la forme de ces polynômes. Ce faisant, nous allons utiliser des méthodes que nous allons généraliser par la suite.

## 1.2 Analyse du problème

Dans ce paragraphe, on va chercher, à partir de la définition, des relations de récurrence entre les $C_n^k$, et établir les propriétés $(i)$ et $(ii)$.

Si $E$ est un ensemble, notons

$$\mathcal{P}_k(E)$$

l'ensemble de ses sous-ensembles à $k$ éléments.

Soit $E$ un ensemble à $n \geq 1$ éléments. $C_n^k$ est alors le nombre d'éléments de $\mathcal{P}_k(E)$.

Remarquons tout de suite que l'application qui à un ensemble associe son complémentaire est une bijection de $\mathcal{P}_k(E)$ sur $\mathcal{P}_{n-k}(E)$, on en déduit immédiatement que

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Soit maintenant $e$ un élément de $E$. Les sous-ensembles à $k$ éléments sont alors exactement répartis dans deux catégories disjointes : ceux qui ne contiennent pas $e$ et ceux qui le contiennent.

Les premiers sont (tous) les sous-ensembles à $k$ éléments de $E - \{e\}$, c'est à dire les éléments de $\mathcal{P}_{k-1}(E - \{e\})$. L'ensemble $E - \{e\}$ ayant $n-1$ éléments, leur nombre est exactement $C_{n-1}^k$.

Les seconds sont les sous-ensembles $X$ de $E$ ayant $k$ éléments et vérifiant qu'il existe un sous-ensemble $Y$ de $E - \{e\}$ tel que

$$X = Y \cup \{e\}$$

Un tel $Y$ est alors un sous-ensemble à $k-1$ éléments de $E - \{e\}$. Ainsi, le nombre de $X$ de la seconde catégorie est exactement $C_{n-1}^{k-1}$.

On en déduit alors la propriété classique :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

## 1.3 Introduisons $P_n(X) = \sum_{k=0}^n C_n^k . X^k$

On injecte la relation de récurrence obtenue dans l'expression de $P_n$ :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \sum_{k=0}^{n} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}).X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^k.X^k + \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1}.X^k \end{aligned}$$

Or de manière évidente $C_{n-1}^n = 0$ et $C_{n-1}^{-1} = 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k.X^k + X.(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k.X^k) \quad (*) \\ &= P_{n-1}(X) + X.P_{n-1}(X) = (1+X).P_{n-1}(X) \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate permet alors de conclure que

$$P_n(X) = (1+X)^n.$$

$(*)$ Notons le changement d'indice $k \mapsto k-1$, typique de ce genre de raisonnement.

## 1.4 Le calcul de $C_n^k$

Maintenant que nous avons une formule simple pour $P_n$, cherchons à en extraire les $C_n^k$.

On calcule $P_n'$ de deux manières différentes :

$$n.(1+X)^{n-1} = P_n'(X) = \sum_{k=1}^{n} k.C_n^k.X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1).C_n^{k+1}.X^k$$

Or le premier terme est clairement égal à $n.P_{n-1}(X) = n.\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k.X^k$
On en déduit par identification du coefficient de $X^k$ que

$$C_n^{k+1} = \frac{n}{k+1}.C_{n-1}^k$$

**Remarque :** *essayez de trouver cette relation directement avec la définition ensembliste...*

Ayant cette dernière expression, et comme il est clair que pour tout $n$, on a $C_n^0 = 1$, on déduit que pour tous $n, k$ avec $n \geq k$ :

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n}{k}.C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{k}.\frac{n-1}{k-1}C_{n-2}^{k-2} \\ &= \cdots \\ &= \frac{n.(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}C_n^0 = \frac{n!}{(n-k)!k!} \end{aligned}$$

## 1.5 Conclusion

Un canevas général peut être tiré de cet exemple lorsqu'on veut exprimer simplement les éléments d'une suite $(u_k)$ donnée par un problème mettant en jeu des phénomènes de récurrence.

1. On cherche à expliciter des relations de récurrence ;
2. on introduit *l'objet* $\sum u_k.X^k$
3. on cherche une expression simple de cet objet, qui nous permet par comparaison de déduire les $u_k$.

Si nous avons écrit ci-dessus *objet* en italique, c'est parcequ'un polynôme n'est défini que pour une suite $(u_k)$ finie (dans notre exemple, les $C_n^k$, **pour** $n$ **fixé.**)

Si on veut étudier une suite plus complexe, comme celle de Fibonacci, il va falloir généraliser la notion de polynôme, en la notion de *série formelle.*

# 2 Séries formelles

Pour faire vite, une série formelle est un polynôme dont le degré peut être infini. C'est un objet algébrique qu'il faut bien se garder de confondre avec la notion analytique de série (plus précisément de *série entière*), fondée sur l'étude de la convergence. Des passerelles entre les deux notions existent et feront l'objet d'un prochain article de Culture*MATH.*

Pour l'heure, nous nous intéressons à la manipulation algébrique de ces objets, et des propriétés qui peuvent en découler, et pas de ce qui se passerait si on les considérait comme *fonction de la variable* $X$. Nous verrons dans le **§2.4** qu'une confusion peut engendrer des erreurs.

## 2.1 Définition et premières propriétés

**Notation 2.1** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

**Définition 2.2** *A toute suite* $(u_n)$ *d'éléments de* $\mathbb{K}$*, on peut associer un objet* $S$*, appelé* série formelle*, et noté*

$$S(X) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n.X^n.$$

En considérant les suites finies, on obtient en particulier les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, dont les séries formelles sont donc une généralisation.

**Remarque 2.3** *Comme pour les polynômes, suivant la nécessité de l'écriture explicite en somme, on utilisera les notations* $S$ *ou* $S(X)$.

Pour que cette notion ait un intérêt, généralisons aussi les opérations des polynômes, en prenant exactement les mêmes formules :

**Définition 2.4** *Soient* $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.X^n$ *et* $T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.X^n$ *deux séries formelles. On peut définir leur somme et leur produit comme suit :*

- $(S+T)(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{a_n} + \mathbf{b_n}).X^n$ *;*
- $(S.T)(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_k}.\mathbf{b_{n-k}}).X^n$

On peut vérifier aisément que ces opérations sont commutatives et associatives et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Elles possèdent toutes deux un élément neutre, qui sont, respectivement, les séries formelles (qu'on peut noter sans trop d'abus) 0 et 1.

Toute série formelle $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.X^n$ possède un opposé pour l'addition, qui est $-S(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-a_n).X^n$.

En appliquant les définitions qui précèdent, on peut constater que deux séries formelles $S$ et $T$ son égales si et seulement si $S - T = 0$.

On a également la propriété suivante, dite d'*intégrité* dont nous donnons la démonstration car c'est un bon exemple de manipulation de cet objet.

**Propriété 2.5** *Si $S$ et $T$ sont deux séries formelles non nulles, alors $S.T$ est non-nulle aussi.*

*Démonstration* : Si $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.X^n$ et $T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.X^n$, alors considérons le plus petit entier $N$ (resp. $M$) tel que $a_N \neq 0$ (resp. $b_M \neq 0$). Ces entiers existent puisque les deux séries sont non nulles. On a alors (vérifiez !)

$$(S.T)(X) = a_N.b_M.X^{N+M} + \sum_{\mathbf{n>N+M}} c_n.X^n$$

peu importent les $c_n$ pour $n > N + M$, ce qui compte est que l'on est sûr qu'il y a au moins un coefficient non-nul : celui de $X^{N+M}$, qui est $a_N.b_M$. Ainsi $S.T$ est non-nulle. □

De manière un peu plus inattendue, on peut montrer la proposition suivante :

**Propriété 2.6** *Une série formelle $S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.X^n$ est inversible pour la multiplication si et seulement si $a_0 \neq 0$.*

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette propriété.[1]

**Exemple 2.7** *Considérons la série formelle $\sum_{k=0}^{\infty} X^k$, alors cette série est inversible, d'inverse $1 - X$ :*

$$\begin{aligned}
(1-X).(\sum_{k=0}^{\infty} X^k) &= \sum_{k=0}^{\infty} X^k - X.\sum_{k=0}^{\infty} X^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} X^k - \sum_{k=0}^{\infty} X^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} X^k - \sum_{k=1}^{\infty} X^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} X^k - \sum_{k=1}^{\infty} X^k \\
&= 1.
\end{aligned}$$

[1] *Indication :* il ne s'agit pas de calculer explicitement l'inverse, mais de montrer qu'il existe, en montrant que ses coefficients sont solutions de systèmes linéaires triangulaires dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à $a_0$.

Introduisons maintenant la notion de dérivée d'une série formelle :

**Définition 2.8** *la* dérivée *d'une série formelle* $S(X) = \sum_{n=0}^{n} a_n.X^n$ *est (sans surprise) la série formelle*

$$S'(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.X^n$$

Nous nous servirons de la dérivée dans le paragraphe suivant.

## 2.2 Séries formelles égales à une fraction rationnelle

On a fait le lien entre polynômes et séries formelles, et on a vu que beaucoup de séries formelles sont inversibles...il paraît donc naturel de chercher le lien entre séries formelles et fractions rationnelles (c'est à dire les quotients de polynômes). Cela dit, la comparaison semble de prime abord délicate puisque les deux mondes sont distincts (leur intersection étant formée par les polynômes).

Dans ce paragraphe, nous allons définir une égalité *formelle* entre fractions rationnelles et séries formelles.

**Attention !** Une fois encore, il ne s'agit pas de comparer l'égalité des résultats obtenus en appliquant la fraction ou la série à un nombre ! Ici, on compare des objets algébriques, sans se soucier du fait qu'ils peuvent servir de fonctions (voir **§2.4.**)

**Remarque importante :** Dans ce qui suit, lorsque nous noterons une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$, nous considérerons systématiquement que cette écriture est *réduite*, c'est à dire que les polynômes $P$ et $Q$ n'ont pas de facteurs communs.

**Définition 2.9** *On dit qu'une série formelle* $S$ *est (formellement) égale à une fraction rationnelle* $F = \frac{P}{Q}$ *si les* séries formelles $P$ *et* $S.Q$ *sont égales. On notera alors tout simplement* $F = S$.

**Remarques 2.10** *1) Notons que dans cette définition, on a considéré sans hésiter le polynôme* $P$ *comme une série entière.*

*2) En utilisant* l'intégrité *des séries formelles (cf.* **Propriété 2.5***), on déduit aisément de cette définition que s'il existe une série égale à une fraction rationnelle, alors cette série est unique, et réciproquement.*

**Exemple fondamental :** L'exemple suivant est fondamental dans la mesure où il permet de calculer tous les cas possibles (en à se ramenant éventuellement à $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k = \frac{1}{1-X}.$$

Pour le montrer, il suffit d'appliquer la définition, en refaisant le calcul vu dans l'**Exemple ??.** Nous verrons une application de cet exemple au §3.1.

Maintenant, nous allons chercher à caractériser les cas où se produisent ces égalités.

**Lemme 2.11** *Soient $S$ une série formelle et $F$ une fraction rationnelle (formellement) égales. Alors $S'$ et $F'$ sont aussi formellement égales.*

*Démonstration* : Posons $F = \frac{P}{Q}$, on a alors $F' = \frac{P'.Q - PQ'}{Q^2}$, et on peut raisonner (dans le monde des séries formelles) et obtenir :

$$\begin{aligned} P &= Q.S \\ P' &= Q'.S + Q.S' \\ Q.P' &= Q'.S.Q + Q^2.S' \\ Q.P' &= Q'.P + Q^2.S' \\ Q.P' - Q'.P &= Q^2.S' \end{aligned}$$

$S'$ est donc bien formellement égale à $F'$.□

**Propriété 2.12** *Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle, alors elle est égale à une série formelle $S$ si et seulement si le polynôme $Q$ n'est pas divisible par $X$ (autrement dit, si et seulement si $0$ n'est pas racine de $Q$.)*

*Dans ce cas, il existe une unique série entière égale à $F$, qui est définie par :*

$$S(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!}.X^k$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette propriété. [2]

Maintenant, il est naturel de chercher une réciproque à la propriété précédente, qui nous est donnée par le théorème suivant (que nous admettrons pour ne pas alourdir le texte).

**Théorème 2.13** *Soit $S(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ une série formelle. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $S$ est formellement égale à une fraction rationnelle ;*

*(ii) il existe des entiers $n$ et $K_0$ et des nombres $C_1, \ldots, C_n$ (fixés) tels que pour tout $k \geq K_0$, on a la relation de récurrence :*

$$a_k = c_1.a_{k-1} + c_2.a_{k-2} + \cdots + c_n.a_{k-n};$$

[2] *Indications* : pour la première partie, considérer le premier terme de chacun des membres de l'égalité. Pour la seconde partie, il faudra utiliser le lemme précédent en faisant une récurrence sur le degré total de $F = \frac{P}{Q}$ (c'est à dire le nombre $deg(P) - deg(Q)$.)

*(iii) il existe des polynômes* $P_1, \ldots, P_n$ *et des nombres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que pour tout* $k$*,*

$$a_k = P_1(k).\lambda_1^k + P_2(k).\lambda_2^k + \cdots + P_n(k).\lambda_n^k.$$

## 2.3 Une généralisation partielle

Comme on peut le constater, l'égalité formelle entre séries et fractions rationnelles vient exclusivement du fait qu'on peut faire des manipulations algébriques sans se soucier d'aspects numériques ni de convergences de séries.

On peut étendre ce type de raisonnement à d'autres objets que les fractions rationnelles, mais définis également par des relations algébriques. En particulier, nous allons nous intéresser au cas des fonctions "racines $n$−ièmes", sans chercher à donner plus de structure à ces objets, et nous admettrons le résultat suivant

**Propriété 2.14** *Soit* $r$ *un rationnel, alors il existe une égalité formelle entre* $(1+X)^r$ *et la série formelle*

$$S(X) = \sum_{k=0}^{\infty} C_r^k.X^k$$

*où* $C_r^k = \dfrac{r.(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ *est une généralisation naturelle des coefficients binômiaux vus au* **§1.**

Si on calcule les dérivées successives de $(1+X)^r$, on constate sans mal que cette formule généralise de plus la **Propriété 2.12.**

**Exemple :** considérons la fonction $\sqrt{1-4X}$. En appliquant la formule précédente on obtient alors

$$\sqrt{1-4X} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^k.X^k.$$

Nous nous servirons de ce résultat dans le **§4.**

## 2.4 Différences et liens entre *égalité formelle* et *égalité fonctionnelle*

Il est tentant d'appliquer l'égalité formelle comme une égalité entre des fonctions. Par exemple, on sait que deux polynômes sont égaux *en tant que polynômes* si et seulement si il sont égaux *en tant que fonctions polynômiales sur* $\mathbb{K}$, de même pour les fractions rationnelles.

Pourquoi n'en est-il pas de même pour les séries formelles ? Tout simplement parce que la question peut être dénuée de sens !

Reprenons l'exemple fondamental du paragraphe précédent :

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k = \frac{1}{1-X}.$$

Appliquons les deux membres de l'égalité à $X = 2$

A droite on obtient $-1$ tandis qu' à gauche, on obtient $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$, ce qui ne veut rien dire (ou à la rigueur $+\infty$ ce qui n'est guère mieux.)

Toutefois, il existe des liens très forts entre égalité fonctionnelle et égalité formelle. Ainsi, on peut montrer aisément que, si $a \in \mathbb{C}$ vérifie $|a| < 1$ (ce qui n'est pas le cas de 2), alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ converge vers $\frac{1}{1-a}$, ce qui donne un sens numérique à notre égalité formelle.

Nous verrons dans un prochain un article de Culture*MATH* comment les *développements limités* permet de faire le lien entre séries formelles et fonctions, grâce à la notion de *série entière*. Pour l'heure contentons-nous d'admettre que l'on peut étendre l'égalité formelle décrite pour les fractions rationnelles à *certaines* fonctions, dites fonctions *analytiques*, qui possèdent en particulier la propriété d'être $C^\infty$ en 0.

On généralise alors la **Proposition 2.12** en disant que, si $\phi$ est une telle fonctione, alors, *pour* $|z| < \rho$ ($\rho$ étant un réel strictement positif dépendant de $\phi$), on a

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}.z^k.$$

**Remarque 2.15** (hors du propos général du texte) *A propos de l'égalité des polynômes, il faut aussi faire attention quand on n'est pas dans un ensemble infini (comme* $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*). En effet, plaçons nous dans un ensemble de nombres fini (comme* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *ou un corps fini), que l'on notera* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$*. Considérons le polynôme*

$$P(X) = (X - a_1).(X - a_2) \cdots (X - a_n)$$

*Il est clair que pour tout a, on a* $P(a) = 0$*...Pourtant, le degré de* $P$ *est* $n$ *et il est donc non-nul! Sur un tel ensemble, l'égalité des polynômes et l'égalité des fonctions polynômiales ne sont pas équivalentes.*

# 3 Un grand classique : la suite de Fibonacci

## 3.1 La suite de Fibonacci

Considérons la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

Cette suite est appelée suite de Fibonacci, elle apparaît dans de nombreux exemples, et même dans la nature (nombre de tours que fait une fleur de tournesol, par exemple !). On aimerait bien avoir une formule simple pour nos $u_n$...

C'est manifestement l'occasion de tester notre **théorème 2.13** en posant $F(X) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k X^k$. Nous allons chercher la fraction rationnelle que vaut $F$, ce qui va nous permettre d'obtenir la formule recherchée. Pour ce faire, nous allons injecter la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} F(X) &= u_0 + u_1.X + \sum_{k=2}^{\infty} u_k X^k \\ &= 1 + X + \sum_{k=2}^{\infty} u_{k-1} X^k + \sum_{k=2}^{\infty} u_{k-2} X^k \\ &= 1 + X + X.(F(X) - 1) + X^2.F(X) \\ &= 1 + (X^2 + X).F(X) \end{aligned}$$

ainsi, on a l'égalité formelle $F(X) = \dfrac{1}{1 - X - X^2}$

**Remarque 3.1** *On voit encore ici la différence entre égalité* formelle *et égalité* des fonctions. *En effet, si on prend $X = 1$, la fraction rationnelle est bien définie (et vaut $-1$), alors que la série n'est pas du tout définie.*

Maintenant, on va chercher à exprimer d'une autre manière $\frac{1}{1-X-X^2}$ comme série formelle, puis identifier les termes pour obtenir notre formule. Nous allons nous ramener au cas fondamental de $\frac{1}{1-X} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$.

Pour ce faire, réduisons notre fraction en éléments simples. Les racines de $1 - X - X^2$ étant $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (tiens, le Nombre d'Or !), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - X - X^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{\beta - X} - \frac{1}{\alpha - X} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1}{\beta} . \left( \frac{1}{1 - \frac{X}{\beta}} \right) - \frac{1}{\alpha} . \left( \frac{1}{1 - \frac{X}{\alpha}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1}{\beta} . \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{X}{\beta} \right)^k \right) - \frac{1}{\alpha} . \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{X}{\alpha} \right)^k \right) \right] \end{aligned}$$

En remarquant que $\alpha = -\frac{1}{\beta}$, on optient donc :

$$\frac{1}{1 - X - X^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^{k+1} \right) X^k$$

Par identification des coefficients des deux expressions de cette série formelle, on obtient donc :

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1}$$

**Remarque 3.2** *Revenons un instant sur la différence entre égalité formelle et égalité fonctionnelle.*

*Comme nous l'avons vu à la remarque* **3.1**, *si* $x \in \mathbb{R}$, *l'égalité des* **nombres** $\frac{1}{1-x-x^2}$ *et* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k.x$ *est* **fausse** *en toute généralité.*

*Mais on a*

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\beta - x} - \frac{1}{\alpha - x}\right).$$

*Or, on a vu au* §?? *que l'égalité* $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ *est vraie pour* $|x| < 1$.

*Que peut-on en déduire pour l'exemple qui nous intéresse ?*

### 3.2 Un autre exemple du même genre

**Question :** Quel est le prochain nombre de la suite $1, 2, 4, 7$ ? et le $48000^\circ$ ?

On peut trouver une série formelle qui va nous permettre de donner *une* réponse sensée à cette question. La trouverez-vous ?

## 4 Des parenthèses aux montagnes : les nombres de Catalan

### 4.1 Les nombres de Catalan

Intéressons-nous au problème suivant : si on prend $n$ parenthèses ouvrantes et $n$ parenthèses fermantes, de combien de manières peut-on les agencer pour obtenir une expression *légale*?

Par « légale », on entend le fait que ça n'a pas de sens de fermer une parenthèse qui n'a pas été ouverte, et qu'à la fin de la phrase, tout les parenthèses ouvertes doivent avoir été fermées.

Mathématiquement, ceci s'exprime ainsi : si on lit l'expression de gauche à droite, il n'y a jamais strictement plus de parenthèses fermantes que de parenthèses ouvrantes, et à la fin il y en a autant.

**Exemple :** pour n=5 :

( ( ) ( ( ) ( ) ) ) est une expression légale.

( ) ) ) ( ( ( ) ( ) est une expression illégale.

Appelons $c_n$ le nombre de manières de parenthéser légalement avec $n$ parenthèses ouvrantes et $n$ parenthèses fermantes. Ces nombres sont appelés *Nombres de Catalan*.

Nous allons déterminer ces nombres en utilisant la série formelle

$$C(X) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n.X^n.$$

Il nous faut toutefois trouver des informations (sous forme de relations de récurrence) à injecter dans l'expression de cette série pour pouvoir l'utiliser.

## 4.2 Chemins de Dyck

Pour ce faire, nous allons utiliser...une autre définition des nombres de Catalan, par les chemins de Dyck. Cette définition est plus visuelle, et nous facilitera la compréhension.

Un chemin de Dyck est essentiellement le contour idéalisé d'une chaîne de montagne vue de la plaine.

Mathématiquement, un $n-$chemin de Dyck est un tracé sur le quart de plan $x \geq 0, y \geq 0$, construit à partir de règles précises :

- on part du point $(0,0)$, que l'on appellera par la suite **origine** du chemin
- on a le droit de tracer $n$ segments $(1,1)$ (que l'on appellera **montées**, et $n$ segments $(1,-1)$ (que l'on appellera **descentes**).
- on termine au point $(2n,0)$, que l'on appellera **arrivée** du chemin.

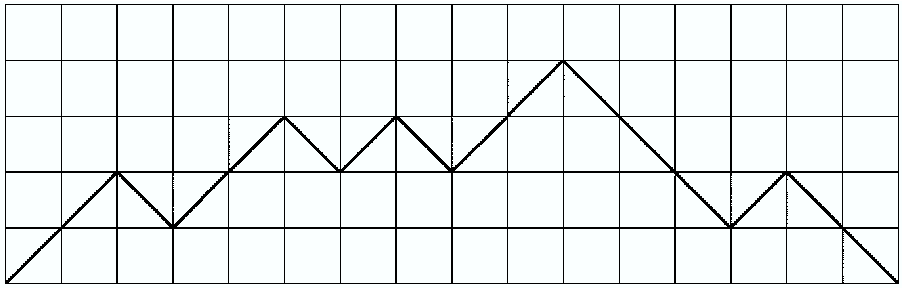

FIG. 1 – Un exemple de $n-$chemin de Dyck, pour n=8

Il est alors clair que dans un tel chemin, il y a forcément $n$ montées $n$ descentes. De plus, à n'importe quel point du chemin, le nombre de descentes effectuées depuis le début est inférieur ou égal au nombre de montées effectuées depuis le début (puisque les ordonnées sont toujours positives).

On peut donc clairement identifier les $n-$chemins de Dyck avec les parenthésages à $2n$ parenthèses, les montées jouant le rôle des parenthèses ouvrantes, les descentes celui des parenthèses fermantes. Ainsi, le nombre de $n-$chemins est $c_n$.

Comment relier $c_n$ aux $c_k$ pour $k < n$ ? Constatons pour commencer que le premier trait est forcément une montée, et le dernier forcément une descente, et que c'est ce qui se passe entre eux qui est significatif. Commençons par étudier un cas particulier intéressant.

**Cas particulier :** Considérons le cas d'un $n-$chemin dont aucun point, à part l'origine et l'arrivée, est d'ordonnée nulle (par exemple celui de la **fig 1**). Oublions le premier trait et le dernier, et déplaçons l'origine au point $(1,1)$, et l'arrivée au point $(n-1,1)$, on obtient alors un $(n-1)$-chemin (cf. **fig 2**).

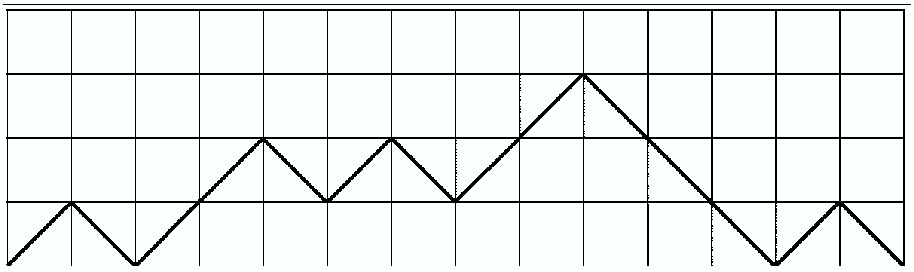

FIG. 2 – Le $(n-1)$-chemin déduit de celui de la **Fig 1** par le procédé précédent.

Réciproquement, si on prend un $(n-1)$-chemin, on peut construire un $n-$chemin correspondant à notre cas particulier en ajoutant une montée au début et une descente à la fin (et en déplaçant l'origine et l'arrivée).

On obtient donc une *bijection* entre les les $(n-1)$-chemins généraux et les $n-$chemins particuliers. Le nombre de ces derniers est donc $c_{n-1}$.

**Cas général :** Maintenant que l'on a vu ce cas particulier intéressant, on va l'utiliser pour découper les $n-$chemins en chemins plus courts.

Si $0 \leq i \leq 2n$, appelons $P_i$ le point du chemin obtenu après $i$ tracés (montées *ou* descentes). Considérons à présent le premier point $P_{2k}$ d'ordonnée nulle*(à part l'origine...)*. Son indice est pair puisqu'on a fait autant de montées que de descentes.

On peut alors (cf. **fig 3**) couper notre $n-$chemin en un $k-$chemin (de l'origine à $P_{2k}$) puis un $(n-k)-$) chemin de ($P_{2k}$ à l'arrivée.)

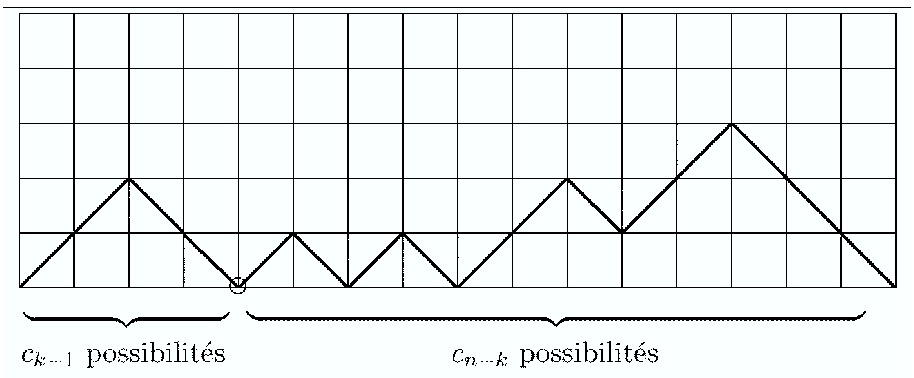


FIG. 3 – Un exemple pour $n = 8$ et $k = 2$

Considérons le premier morceau : c'est un $k-$chemin qui, par définition de $P_{2k}$, ne possède pas de point d'ordonnée nulle à part son origine et son arrivée.

Il y a donc $c_{k-1}$ possibilités.

Considérons le second morceau : c'est un $(n-k)-$chemin qui est a priori parfaitement quelconque. Il y a donc $c_{n-k}$ possibilités.

Comme on peut choisir parfaitement indépendamment le premier et le second morceau, il y a donc au total $c_{k-1}.c_{n-k}$ $n$-chemins dont le premier point d'ordonnée nulle après l'origine est $P_{2k}$.

On peut donc classer les $n-$chemins en $n$ ensembles disjoints, en fonction de de l'indice $2k$ du premier point d'ordonnée nulle après l'origine :

- k=1 : $c_0.c_{n-1}$ possibilités,
- k=2 : $c_1.c_{n-2}$ possibilités,
- k=3 : $c_2.c_{n-3}$ possibilités,
  ...
- k=n-1 : $c_{n-2}.c_1$ possibilités,
- k=n : $c_{n-1}.c_0$ possibilités.

On obtient donc enfin une relation de récurrence pour $n \leq 1$ :

$$c_n = c_0.c_{n-1} + c_1.c_{n-2} + \cdots + c_{n-2}.c_1 + c_{n-1}.c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k.c_{n-1-k}.$$

### 4.3 De la relation de récurrence à la série formelle

Cela dit, cette relation ne ressemble pas su tout à celle que nous avions dans le **§3** ! injectons toutefois la relation dans la définition de $C(X)$ :

$$\begin{aligned} C(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n.X^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.X^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n-1} c_k.c_{n-1-k}).X^n \end{aligned}$$

Ceci ressemble beaucoup à la définition du terme général du produit de $C(X)$ par elle-même (cf. **Définition 2.4.** En effet, on a

$$C(X)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} c_k.c_{n-1-k}).X^n$$

En factorisant $X$ dans l'expression obtenue 3 lignes plus haut, on obtient donc :

$$\begin{aligned} C(X) &= 1 + X.\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n-1} c_k.c_{n-1-k}).X^{n-1} \\ &= 1 + C(X)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, en résolvant l'équation, on obtient

$$C(X) = \frac{1-\sqrt{1-4X}}{2X} \quad ou \quad C(X) = \frac{1+\sqrt{1-4X}}{2X}$$

Or, d'après l'exemple donné dans le §**2.3**, on sait que

$$\sqrt{1-4X} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^{k}.X^{k}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} C(X) &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^{k}.X^{k}}{2X} \quad ou \quad C(X) = \frac{2-\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^{k}.X^{k}}{2X} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^{k}.X^{k}}{2X} \quad ou \quad C(X) = \frac{2-\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^{k}.X^{k}}{2X} \end{aligned}$$

Comme on sait que les nombres de catalan, coefficients de $C(X)$, sont positifs, on peut exclure à présent la seconde formule et obtenir enfin :

$$c_n = \frac{}{(n+1)!} C_{2n}^{n}.$$

Ouf ! ça n'a pas été simple...

# 5 Conclusion

Dans ce texte, on a vu comment l'utilisation d'un objet algébrique et formel pouvait permettre d'organiser ses calculs pour obtenir des informations. Nous avons également vu qu'il y avait certains dangers à se donner *trop de sens* aux calculs effectués formellement. Nous verrons bientôt comment les *séries entières* permettent de joindre la forme à la substance et de contrôler la véracité de ses équations sans avoir besoin du cadre formel rigide comme garde-fou.