Graphes planaires

Commençons par énoncer deux problèmes pratiques :

Problème 1 *Dans un pays donné, on désire réorganiser les voies de communications de façon à relier entre elles les* 11 *plus grandes villes. Elles doivent être reliées deux à deux soit par un canal, soit par un chemin de fer.*

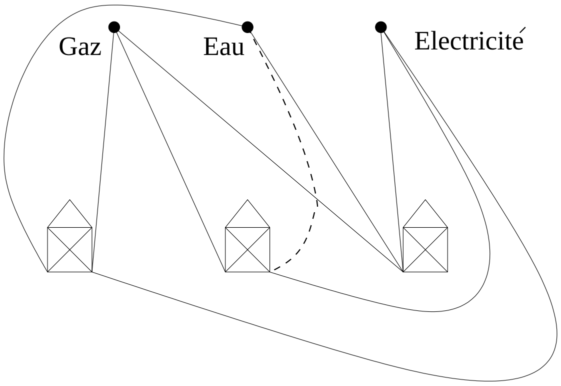
Or les ingénieurs du pays, s'ils savent parfaitement faire passer une voie ferrée au-dessus d'un canal, ne savent pas faire passer une voie ferrée au-dessus d'une autre, ni un canal au-dessus d'un autre !

Peut-on les aider, et leur proposer un tracé ? (On pourra placer les villes comme on le désire)

Nous invitons le lecteur à ne pas chercher une solution trop longtemps, nous verrons plus loin qu'il n'y en a pas ! Un autre problème du même type, assez célèbre, est le suivant :

Problème 2 *Sur un côté d'une rue, trois maisons sont alignées. Devant elles sont placées respectivement des arrivées générales de gaz, d'électricité, et d'eau.*

Comment faire pour alimenter les trois maisons en ces trois fluides sans que deux conduites ne se croisent ?



Si l'on essaie de placer les différentes conduites, on s'aperçoit qu'il est possible, sans trop de difficultés, de placer les 8 premières. En revanche, il semble absolument impossible de placer la dernière sans croiser l'une des précédentes. Sur la figure ci-dessus, même en "contournant" le bloc, la dernière conduite, représentée en pointillés, croiserait nécessairement l'une des précédentes.

1 Graphes planaires

Dans tout ce texte, nous ne considérerons que des graphes simples, c'est-à-dire des graphes sans "boucle" (arête joignant un sommet à lui-même), et sans arête multiple (deux sommets reliés par plusieurs arêtes).

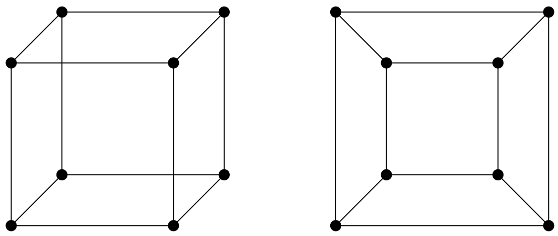
1.1 Définitions

Les deux problèmes précédents nous conduisent à introduire plus formellement la notion de graphe planaire : il s'agit de déterminer des conditions dans lesquelles nous pourrons affirmer que tel ou tel graphe EST planaire, ou N'EST PAS panaire. On trouvera une présentation légèrement différente de ce qui suit dans [2].

Définition Soit G un graphe dont l'ensemble des sommets est noté V et l'ensemble des arêtes E.

- Une représentation planaire du graphe G est la donnée, dans le plan, d'un ensemble de points de même cardinal que V, reliés deux à deux par des courbes continues du plan lorsque les sommets correspondant du graphe sont reliés, et tels que ces courbes ne se croisent pas.
- Un graphe G est dit planaire si et seulement si il admet une représentation planaire.

EXEMPLE : Si l'on considère le cube comme un graphe, une représentation de perspective classique (à gauche) ne sera pas planaire. Ceci pourrait nous inciter à penser que le graphe correspondant ne l'est pas non plus. Il n'en est rien, comme le montrer la représentation de droite du même graphe, planaire cette fois.



En revanche, le graphe correspondant au problème 2 n'est pas planaire. Il est appelé graphe bipartite complet 3×3, et noté $K_{3,3}$. C'est le graphe reliant chaque sommet d'un ensemble de 3 sommets à chaque sommet d'un deuxième ensemble de 3 sommets.

Définition Soit G un graphe planaire. Une face F de G est une région maximale du plan délimitée par un ensemble d'arêtes de G, et qui n'en contient aucune. Le degré de F, noté deg (F), est le nombre d'arêtes de G qui bordent F.

EXEMPLE : Dans la représentation planaire précédente du graphe du cube, nous avons exactement 6 faces, numérotées de 1 à 6. Toutes sont bordées par 4 arêtes du graphe exactement, c'est-à-dire qu'elles sont toues de degré 4.

1.2 Une première propriété

Propriété 1.1 *Soit* G *un graphe planaire et a le nombre d'arêtes de* G. *Alors*

$$\sum_{\mathrm{F}\ face} deg\,(\mathrm{F}) = 2a$$

Démonstration Cette propriété est presque évidente : elle n'exprime ni plus ni moins que le fait qu'une arête donnée du graphe G borde exactement 2 faces. Elle contribue pour 1 au degré de chacune.

Lorsque l'on calcule la somme $\sum_{\text{F face}} deg\,(\text{F})$, on aura donc compté exactement deux fois chaque arête du graphe.

$\square$

EXEMPLE : Toujours dans le cas de notre représentation planaire du graphe du cube, les 6 faces sont toutes de degré 4, soit un total de $6 \cdot 4 = 24$, et nous avons bien $24/2 = 12$ arêtes.

2 La formule d'Euler

2.1 Un outil technique

Définition

(i) Un chemin de longueur r du graphe G est une suite $(\text{S}_0, \ldots, \text{S}_r)$ de sommets telle que pour tout i dans $[\![\, 0\,; r-1 \,]\!]$ il existe une arête reliant S_i à S_{i+1}. S_0 est appelé origine du chemin, et S_r extrémité du chemin.

(ii) Un graphe est dit connexe lorsque tout couple de sommets peut être relié par un chemin.

(iii) Le chemin $(\text{S}_0, \ldots, \text{S}_r)$ est appelé un circuit (ou chemin fermé) s'il vérifie $\text{S}_0 = \text{S}_r$.

(iv) Un arbre est un graphe connexe sans circuit.

Lemme 2.1 *Tout graphe connexe peut s'obtenir en ajoutant un certain nombre d'arêtes à un arbre (ayant même nombre de sommets).*

Démonstration Par récurrence sur le nombre de circuits du graphe. Le cas $n = 0$ est immédiat, puisqu'un graphe connexe sans circuit est un arbre. Supposons donc le résultat établi pour tous les graphes connexes ayant au plus n circuits (n est un entier désormais fixé).

Soit G un graphe connexe possédant exactement $n+1$ circuits. Considérons le graphe G' obtenu en enlevant à G exactement une arête de l'un des circuits. Alors G' est encore un graphe connexe, possédant cette fois au plus n circuits.

En effet, le fait qu'il ait strictement moins de circuits que G est immédiat : nous avons enlevé une arête d'un circuit, et ce faisant le circuit en question n'est pas dans G'. Comme G' est un sous-graphe de G (*i.e.* est inclus dans G), tout circuit de G' est un circuit de G, et donc G' a strictement moins de circuits que G.

N.B. Attention : G' peut avoir strictement moins que n circuits, car l'arête enlevée peut appartenir à plusieurs circuits de G.

D'autre part, G' est encore connexe. Pour voir cela, soient S et S' deux sommets. Comme G est connexe, il existe dans G un chemin de S à S'.

Si ce chemin ne passe pas par l'arête que l'on enlève, il est encore dans G' et donc les deux sommets reste reliés dans G'. Si ce chemin passe par l'arête en question, il suffit de "faire le tour" : si l'on appelle S_1 et S_2 les deux sommets reliés par l'arête qu l'on ôte, nous avions un circuit de la forme : $(\text{S}_1, \text{S}_2, \text{S}_3, \ldots, \text{S}_r, \text{S}_1)$ (où r est un entier), puisque par définition cette arête a été choisie appartenent à un circuit. Dans le chemin de S à S', il suffit alors de remplacer l'arête manquante par le chemin $(\mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_r, \mathrm{S}_1)$ pour cette fois rester dans G'.

Donc G' est encore connexe. Par l'hypothèse de récurrence, G' peut s'obtenir à partir d'un arbre T par ajout d'un certain nombre d'arêtes. Partant de T, si l'on rajoute ces arêtes plus, pour finir, l'arête que l'on a enlevée pour passer de G à G', on retrouve bien G. Le lemme est donc établi par récurrence.

□

2.2 Formule d'Euler pour les graphes planaires connexes

Théorème 2.2 (Formule d'Euler) *Soit* G *un graphe planaire connexe. Soit* n *le nombre de sommets de* G, a *son nombre d'arêtes et* f *son nombre de faces.*

Alors
$$n - a + f = 2$$

Démonstration D'après le lemme 2.1, tout graphe planaire connexe s'obtenant à partir d'un arbre par ajout d'un certain nombre d'arêtes. Il suffit donc de montrer que la formule est vraie pour un arbre, et qu'elle reste vraie lorsque l'on rajoute une arête qui ne coupe aucune des précédentes.

- Cas d'un arbre :
  Soit toujours n le nombre de sommets de G, a son nombre d'arêtes et f son nombre de faces.
  G est un arbre, donc $a = n - 1$, par récurrence sur le nombre de sommets de l'arbre. On a bien $1 - 1 = 0$ arêtes pour un arbre à un seul sommet. Supposons le résultat établi pour tout arbre à n sommet, et soit donc un arbre à $n + 1$ sommets. Enlevant une "feuille", c'est-à-dire une sommet duquel ne part qu'une seule arête ainsi que l'arête en question, on se ramène à un arbre à n sommets, et donc $n - 1$ arêtes par l'hypothèse de récurrence. Notre arbre à $n + 1$ sommets a donc bien n arêtes (les $n - 1$ précédentes plus celle que l'on a enlevée), et l'on conclue par récurrence.
  L'existence d'une "feuille" se prouve, par exemple, en considérant un chemin de longueur maximal (pour la bonne définition de cet objet, on ne considère que les chemins passant au plus une fois par chaque arête). Une extrémité d'un tel chemin est nécessairement une "feuille" de l'arbre : si tel n'était pas le cas, on pourrait prolonger le chemin, puisque ledit chemin n'a pas pu passer auparavant par ce sommet (notre arbre n'a pas de cycle). Et ceci contrerait la maximalité du chemin.
  D'autre part, on a $f = 1$: là aussi, il suffit de voir que, lorsqu'on construit un arbre, on ne coupe jamais le plan en deux partie.
  On obtient donc $n - a + f = n - (n - 1) + 1 = 2$.
- Ajout d'une arête :
  Cette opération n'affecte évidemment pas le nombre de sommet n, et augmente d'une unité le nombre d'arêtes a. Enfin, le nombre de face f est également augmenté d'une unité par cette opération.
  Et comme $n - (a + 1) + (f + 1) = n - a + f$, on conclue que l'ajout d'une arête n'affecte pas ce nombre, qui reste donc égal à 2.

□

EXEMPLE : Reprenons notre exemple du cube : il vérifie $n = 8$, $a = 12$, et $f = 6$. Et l'on a bien $8 - 12 + 6 = 2$!

2.3 Critères de graphes planaires

Corollaire 2.3 *Soit* G *un graphe simple planaire connexe.*

- *Alors les nombres n de sommets et a d'arêtes de* G *vérifient la relation :*

$$a \leq 3n - 6$$

- *Si de plus* G *est sans triangle, alors $a \leq 2n - 4$.*

Démonstration Soit en effet G un graphe simple planaire connexe. G est simple, il n'y a pas de "boucle" ni d'arête multiple, donc toute face est bordée par au moins 3 arêtes.

C'est-à-dire que pour toute face F, on a $deg\,(\mathrm{F}) \geq 3$. Si l'on somme cette inégalité sur toutes les faces du graphe, on obtient $\sum_{\mathrm{F\ face}} deg\,(\mathrm{F}) \geq 3f$.

Mais d'après la propriété 1.1, on a $\sum_{\mathrm{F\ face}} deg\,(\mathrm{F}) = 2a$, et donc :

$$2a \geq 3f$$

D'autre part, on tire de la formule d'Euler l'expression $f = 2 + a - n$. Remplaçant f par cette valeur, on obtient $2a \geq 3\,(2 + a - n)$, soit :

$$a \leq 3n - 6$$

La deuxième partie du corollaire se démontre de façon identique. Si le graphe est sans triangle, on a pour toute face F, $deg\,(\mathrm{F}) \geq 4$. On obtient alors par sommation $2a \geq 4f$, puis grâce à la formule d'Euler :

$$a \leq 2n - 4 \qquad \square$$

N.B. On peut bien sûr continuer pour les graphes sans cycles de longueur 4, et ainsi de suite. Si G n'a pas de cycle de longueur inférieure ou égale à r, on trouve ainsi :

$$a \leq \frac{r}{r-2}\,(n-2)$$

Application : Le problème 1 n'a pas de solution.

Soient en effet nos 11 villes numérotées de 1 à 11. Si l'on ne fait pas la distinction entre canaux et voies ferrées, le tracé de tous ces moyens de communication nous donne un graphe à 11 sommets et $\mathrm{C}_{11}^2 = 55$ arêtes.

Toutes ces arêtes peuvent être rangées dans deux catégories : celles qui correspondent à des canaux et celles qui correspondent à des voies ferrées. Nous obtenons donc deux graphes ayant chacun au maximum 11 sommets (peut-être moins, une ville donnée peut n'être desservie que par bateau, ou seulement par train). D'autre part, la somme de leurs nombres d'arêtes respectifs fait 55. L'un d'entre eux a donc au moins 28 arêtes. (C'est le principe des tiroirs !)

Mais $28 > 3 \cdot 11 - 6$, donc ce graphe ne satisfait pas le critère des graphes planaires connexes. En conclusion, quel que soit le tracé, il faudra que se croisent deux canaux, ou deux voies ferrées.

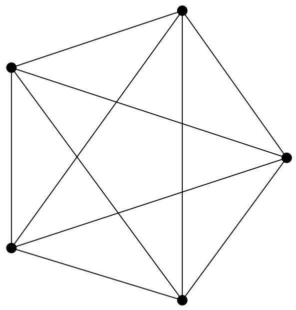
N.B. Le lecteur pointilleux pourra objecter qu'aux dernières nouvelles, la terre est ronde, et que nous cherchons donc un tracé sur une sphère et non pas dans un plan. Heureusement, tout fonctionne de la même manière sur une sphère. Pour voir cela, on peut refaire tout ce qui précède sur une sphère, les arguments sont identiques. On peut aussi remarquer qu'une représentation d'un graphe donné sur une sphère nous donne une représentation sur le plan (et inversement) par projection stéréographique à partir d'un point quelconque de la sphère qui n'est sur aucune arête, c'est-à-dire en "dépliant" la sphère en un point qui n'appartient pas au graphe (ou, dans le sens inverse, en repliant le plan en l'infini).

3 Caractérisation des graphes non planaires

Théorème 3.1 K_5 *et* $\mathrm{K}_{3,3}$ *ne sont pas planaires.*

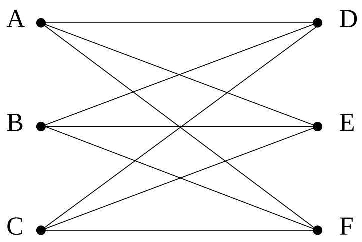
Démonstration

- Le graphe K_5 est le graphe complet à 5 sommets, c'est-à-dire le graphe qui relie par une arête tout couple de sommets pris parmis 5.



  Il possède $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ arêtes. C'est un graphe simple, connexe, donc il vérifierait $a \leq 3n - 6$ s'il était planaire. Or, manifestement, $10 > 3 \cdot 5 - 6$, et donc K_5 n'est pas planaire.

- $\mathrm{K}_{3,3}$ possède, lui, 6 sommets et $3 \cdot 3 = 9$ arêtes. Comme $9 < 3 \cdot 6 - 6 = 6$, le premier critère ne suffit plus à montrer que ce graphe n'est pas planaire.



  En fait, ce graphe est de plus sans triangle. En effet, le graphe relie chaque sommet de l'ensemble $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ à chaque sommet de l'ensemble $\{\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$. Un triangle comporterait nécessairement deux sommets (voire trois) du même groupe (par exemple, A, B et D). Mais alors, les deux sommets en question n'ont pas à être reliés par une arête de $\mathrm{K}_{3,3}$, qui est donc sans triangle. Les cycles les plus courts sont de longueur 4, par exemple le cycle $(\mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{B}, \mathrm{E}, \mathrm{A})$.

Appliquant la deuxième partie de notre corollaire, on en déduit que, s'il était plainaire, le graphe $K_{3,3}$ devrait vérifier la formule $a \leq 2n - 4$. Mais cette fois, on a $9 > 2 \cdot 6 - 4$, et donc $K_{3,3}$ n'est pas un graphe planaire.

□

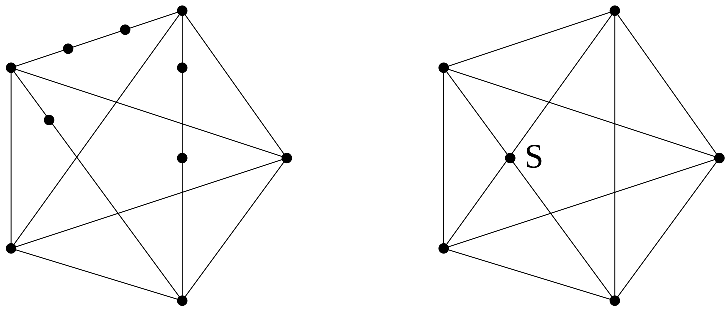
Le problème 2 n'a donc lui non plus aucune solution.

En réalité, K_5 et $K_{3,3}$ sont les deux exemples fondamentaux de graphes non planaires. Nous allons voir que tout graphe non planaire se déduit de l'un de ces deux cas, dans un sens qui reste à définir.

Définition Soit G un graphe. Un graphe G′ est appelé subdivision du graphe G s'il se déduit de G par insertions successives d'un certain nombre de sommets "sur" des arêtes de G.

Plus formellement, G′ est une subdivision de G s'il s'obtient à partir de G par des opérations successives de remplacement d'une arête S_1S_2 de G (S_1 et S_2 étant des sommets de G) par un nouveau sommet S_3 plus deux arêtes S_1S_3 et S_2S_3.

Exemple : Dans la figure ci-dessous, le graphe de gauche est une subdivision de K_5, mais pas celui de droite. En effet, dans celui-ci, on introduit un nouveau sommet S de valence 4 (4 arêtes y arrivent), ce qui n'est pas possible en appliquant l'opération précédemment décrite, qui ne permet d'obtenir que des sommets de valence 2.



Théorème 3.2 *(Kuratowsky)*

Un graphe G *est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivision de* K_5 *ou de* $K_{3,3}$.

La démonstration de ce théorème est assez difficile, quel que soit le point de vue. On peut trouver une démonstration assez accessible dans [1]. L'idée majeure est de raisonner par récurrence sur le nombre de sommets du graphe.

Références

[1] J.L. Gross, T.W. Tucker, *Topological Graph Theory*, John Wiley & Sons, 1987.

[2] J.M Aldous, R.J. Wilson, *Graphs and applications : an introductory approach*, Springer, 2000.