Intégrale de Riemann et Intégrale de Lebesgue

Jean Gounon

http://dma.ens.fr/culturemath

$\boxed{\text{INTEGRALE DE RIEMANN}}$

1 Définitions

Dans tout le chapître, $a \prec b$ et f est une fonction réelle bornée sur $[a, b] = \mathrm{I}$

Définition 1.1 *Un* partage *de* I *est un ensemble* $p = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1,} x_n\}$ *avec* $a = x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_{n-1} \prec x_n = b$

Si $p \subset p'$ *on dit que* p' *est* plus fin *que* p.

Notation 1.2 $\forall k \in \{1, ..., n\} : \mathrm{I}_k = [x_{k-1}, x_k]$; $m_k = \inf f(\mathrm{I}_k)$; $\mathrm{M}_k = \sup f(\mathrm{I}_k)$

Définition 1.3 Sommes de Darboux de f relatives à un partage p :

$s_f(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$; $\mathrm{S}_f(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \mathrm{M}_k$ *(on a donc* $s_f(p) \leq \mathrm{S}_f(p)$*)*

Propriété 1.4 $p \subset p' \Longrightarrow [s_f(p) \leq s_f(p')$ *et* $\mathrm{S}_f(p) \geq \mathrm{S}_f(p')]$

Démonstration :

Principe de la démonstration pour la première propriété (idem pour l'autre) :

1) Cas particulier : $p = \{x_0, ..., x_n\}$ et $p' = p \cup \{x\}$ avec $x_{k-1} \prec x \prec x_k$

2) Cas général : $p' = p \cup \{y_1, ..., y_r\}$: récurrence sur r, en utilisant 1)

Propriété 1.5 *Pour* tous *partages* p *et* p' *:* $s_f(p) \leq \mathrm{S}_f(p')$

Démonstration :

$s_f(p) \leq s_f(p \cup p') \leq \mathrm{S}_f(p \cup p') \leq \mathrm{S}_f(p')$

Remarque 1.6 *Soit* $\mathfrak{P}$ *l'ensemble de tous les partages de* I *: l'ensemble* $\{s_f(p)\}_{p \in \mathfrak{P}}$ *est donc majoré (par un quelconque* $\mathrm{S}_f(p)$*) et l'ensemble* $\{\mathrm{S}_f(p)\}_{p \in \mathfrak{P}}$ *est donc minoré (par un quelconque* $s_f(p)$*).*

Notation 1.7 *On note* $\sigma_f = \sup\limits_{p \in \mathfrak{P}} s_f(p)$ *et* $\sum_f = \inf\limits_{p \in \mathfrak{P}} \mathrm{S}_f(p)$

Propriété 1.8 $\sigma_f \leq \sum_f$

Démonstration :

Sinon $\sigma_f \succ \sum_f$ et il existerait des partages p et p' tels que $\sigma_f \succ s_f(p) \succ \frac{1}{2}(\sigma_f + \sum_f) \succ \mathrm{S}_f(p') \succ \sum_f$, impossible car $s_f(p) \leq \mathrm{S}_f(p')$

Théorème 1.9 *f est* intégrable au sens de Riemann, *ou* Riemann-intégrable, *ou* R-intégrable, *si et seulement si $\sigma_f = \sum_f$. dans ce cas on note $\sigma_f = \sum_f = \int_a^b f(x)dx$,* intégrale (de Riemann) de f *sur* $[a, b]$

Notation 1.10 *Si $a \succ b$, on pose $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (si f est R-intégrable sur $[b, a]$) ; on pose de plus : $\int_a^a f(x)dx = 0$*

2 Propriétés

Théorème 2.1 *(relation de Chasles)*

Soient $a, b, c \in \mathrm{R}$, distincts deux à deux; soient $\alpha = \min\{a, b, c\}$ et $\beta = \max\{a, b, c\}$. Si f est R-intégrable sur $[\alpha, \gamma]$, alors les trois intégrales $\int_a^c f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_b^c f(x)dx$ sont définies et l'on a :

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Théorème 2.2 *Soit $\lambda \in \mathrm{R}$ et f, g R-intégrables sur $[a, b]$. Alors :*

1) $f + g$ est R-intégrable et $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) λf est R-intégrable et $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

3) fg est R-intégrable

Remarque 2.3 *Les propriétés 1) et 2) expriment que l'ensemble $\mathfrak{R}$ des fonctions R-intégrables sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[a, b]$ et que l'application $\varphi : \mathfrak{R} \longrightarrow [a, b] : f \longmapsto \int_a^b f(x)dx$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{R}$*

Théorème 2.4 *Si f est R-intégrable sur $[a, b]$ et vérifie : $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0$, alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$*

(La forme linéaire φ définie ci-dessus est donc une forme linéaire positive*)*

Théorème 2.5 *On a l'équivalence : f R-intégrable sur $[a, b] \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \succ 0 \ \exists p \in \mathfrak{P} : \mathrm{S}_f(p) - s_f(p) \prec \varepsilon$*

Théorème 2.6 *Les fonctions monotones sur $[a, b]$ sont R-intégrables sur $[a, b]$.*

Rappels : 1) Une fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 présente en x_0 une *discontinuité de première espèce* si et seulement si *:* f est discontinue en x_0 et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_o+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0-} f(x)$ existent dan R.

2) Une fonction f définie sur $[a, b]$ est *continue par intervalles* sur $[a, b]$ si et seulement si elle n'admet qu'un nombre fini (éventuellement nul) de discontinuités, ces discontinuités étant toutes de première espèce.

Théorème 2.7 *Les fonctions continues par intervalles sur $[a, b]$ sonr R-intégrables.*

Théorème 2.8 *Si f est R-intégrable sur $[a,b]$, alors : $|f|$ est R-intégrable sur $[a,b]$ et :* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

Notation : Soit f R-intégrable sur $[a,b]$ (on sait que alors,pour tout $x \in]a,b]$, f est R-intégrable sur $[a,x]$) ; on sait par ailleurs que $\int_a^a f(t)dt = 0$). On définit alors la fonction notée $\mathrm{F} : [a,b] \longrightarrow \mathrm{R} : x \mapsto \mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$

Théorème 2.9 *1) Si f est R- intégrable sur $[a,b]$, alors* F *est continue sur $[a,b]$*

2) Si f est continue sur $[a,b]$, alors F *est dérivable sur $[a,b]$ et* $\mathrm{F}' = f$

Théorème 2.10 *(Inégalité de la moyenne)*

Soient $m = \inf f([a,b])$ et $\mathrm{M} = \sup f([a,b])$. Alors, si f est R-intégrable sur $[a,b]$:

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \mathrm{M}(b-a)$

Théorème 2.11 *(formule de la moyenne pour une fonction continue)*

Si f est continue sur $[a,b]$, alors : $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(c)$

Notation :

Soit f bornée sur $[a,b]$ et $p = \{x_0, ..., x_n\}$ un partage de $[a,b]$. Un élément $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathrm{R}^n$ est un *n-uple associé à p* si et seulement si : $\forall k \in \{1, ..., n\}$: $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Définition 2.12 *Avec les notations ci-dessus, on appelle* somme de Riemann de f correspondant à p et ξ *le nombre* $\varphi_f(p,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_k)$

Théorème 2.13 *(les notations sont les mêmes que ci-dessus*

f est R-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si :

$\exists \mathrm{I} \in \mathrm{R} : \forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0 : \forall (p,\xi) : \max\limits_{k\in\{1,...,n\}} (x_k - x_{k-1}) \prec \alpha \Longrightarrow |\varphi_f(p,\xi) - \mathrm{I}| \prec \varepsilon$. *Dans ce cas, on a :* $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$

Théorème 2.14 *Soit f une fonction R-intégrable sur $[a,b]$; soit la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{N}^*}$ définie par :* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. *Alors :* $\lim u_n = \int_a^b f(x)dx$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème précédent au partage $p = \{x_0, ..., x_n\}$ tel que $\forall k \in \{1, ..., n\} : x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$ et au n-uple $\xi = (x_1, ..., x_n)$

Remarque 2.15 *Ce théorème permet d'étudier des limites de suites.*

Exemple : Etudier $\lim u_n$ avec $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$:

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$; soit alors la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in [1,2]$. f est continue sur $[1,2]$; donc : $\lim u_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$

Théorème 2.16 *(changement de variable)*

Soient les fonctions f et g telles que : f est continue sur $[a, b]$; g est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et g' est continue sur $[\alpha, \beta]$; $\forall t \in [\alpha, \beta] : g(t) \in [a, b]$. Alors : $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$

Théorème 2.17 *(intégration par parties)*

Soient deux fonctions f et g dérivables sur $[a, b]$ et telles que $f\ '$ et g' soient continues sur $[a, b]$. Alors : $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f\ '(x)g(x)dx$

3 Sous-ensembles négligeables de R

3.1 Famille sommable

Définition 3.1 *Soit* I *un ensemble quelconque. Soit* $\mathfrak{F}(\mathrm{I})$ *l'ensemble des parties finies de* I. *Soit* $a = (a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de réels* a_i *: on note, pour* $\mathrm{J} \in \mathfrak{F}(\mathrm{I})$: $s_{\mathrm{J}}(a) = \sum\limits_{i\in \mathrm{J}} a_i \in \mathrm{R}$. *La famille* $a = (a_i)_{i\in \mathrm{J}}$ *est dite* sommable *si et seulement si :*

$\exists s \in \mathrm{R} : \forall \varepsilon \succ 0 : \exists \mathrm{J}_\varepsilon \in \mathfrak{F}(\mathrm{I}) : \forall \mathrm{J} \in \mathfrak{F}(\mathrm{I}) : \mathrm{J}_\varepsilon \subset \mathrm{J} \Longrightarrow |s - s_{\mathrm{J}}(a)| \leq \varepsilon$

Dans ce cas, on note : $s = \sum\limits_{i\in \mathrm{I}} a_i$, *que l'on nomme* somme *de la famille sommable* a. *Ce nombre* s *est unique.*

3.2 Longueur d'un intervalle borné de R

Définition 3.2 *Soit* I *un intervalle borné ; soit* $a = \inf \mathrm{I}$ *et* $b = \sup \mathrm{I}$. *La* longueur *de* I *est* $l(\mathrm{I}) = b - a$.

3.3 Sous-ensemble négligeable de R

Définition 3.3 *Soit* $\mathrm{E} \subset \mathrm{R}$. E *est* négligeable *si et seulement si : pour tout* $\varepsilon \succ 0$ *il existe une famille* $(\mathrm{I}_n)_{n\in \mathrm{I}}$ *d'intervalles ouverts bornés telle que :*

1) $\mathrm{E} \subset \bigcup\limits_{n\in \mathrm{I}} \mathrm{I}_n$

2) la famille $(l(\mathrm{I}_n))_{n\in \mathrm{I}}$ *de réels positifs est sommable et* $\sum\limits_{n\in \mathrm{I}} l(\mathrm{I}_n) \prec \varepsilon$

Propriété 3.4 *1) Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable*

2) Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable (en particulier, tout ensemble fini ou dénombrable est négligeable).

Remarque 3.5 *Un ensemble peut être négligeable sans être fini ou dénombrable :*

Exemple :

L'ensemble triadique de Cantor est négligeable et a la puissance du continu (rappelons qu'il s'agit de l'ensemble $\mathrm{K} = \bigcap\limits_{n\in \mathrm{N}} \mathrm{F}_n$,avec $\mathrm{F}_0 = [0,1]$ et, pour tout $n \in \mathrm{N}$: on passe de F_n à F_{n+1} en supprimant dans chaque intervalle maximal $[a,b] \subset \mathrm{F}_n$ l'intervalle $\left]a + \dfrac{b-a}{3}, a + 2\dfrac{b-a}{3}\right[$; exemple : $\mathrm{F}_1 = [0,1] - \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[= \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$; $\mathrm{F}_2 = \left[0, \dfrac{1}{9}\right] \cup \left[\dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{9}\right] \cup \left[\dfrac{8}{9}, 1\right]$).

3.4 Propriété vraie presque-partout

Soit une propriété $\mathrm{P}(x)$ $(x \in \mathrm{R})$. La propriété $\mathrm{P}(x)$ est *vraie presque-partout sur* $\mathrm{A} \subset \mathrm{R}$ si et seulement si $\mathrm{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in \mathrm{A} - \mathrm{E}$, E étant négligeable.

Exemple d'utilisation de cette notion :

Théorème 3.6 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathrm{R}$. f est R-intégrable si et seulement si :*

1) f est bornée sur $[a,b]$

2) f est continue presque-partout sur $[a,b]$ (i.e.l'ensemble de ses points de discontinuité sur $[a,b]$ est négligeable).

4 Mesure de Lebesgue

4.1 Fonctions continues à support compact

Définition 4.1 *Soit $f \in \mathfrak{F}$ (ensemble des fonctions réelles définies sur* R*). Le* support *de f est :* $\mathrm{S}upp(f) = \mathrm{A}dh(f^{-1}(\mathrm{R}^*))$.

On note $\mathfrak{K}$ l'ensemble des fonctions f, continues et à support compact. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}$.

4.2 Mesure de Lebesgue

Soit $f \in \mathfrak{K}$; $\mathrm{S}upp(f)$ étant borné, soient $a, b \in \mathrm{R}$ tels que $\mathrm{S}upp(f) \subset [a,b]$. Alors (par relation de Chasles) $\int_a^b f(x)dx$ (intégrale de Riemann de la fonction f continue sur $[a,b]$) est indépendant de a et b ainsi choisis.

Définition 4.2 *La* mesure de Lebesgue sur R *est l'application $\mu : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathrm{R}$: $f \mapsto \mu(f) = \int_a^b f(x)dx$, a et b étant choisis arbitrairement comme ci-dessus.*

Propriété 4.3 *D'après les propriétés connues de l'intégrale de Riemann : μ est une forme linéaire positive sur l'espace vectoriel $\mathfrak{K}$, i.e. :*

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}\ \forall f, g \in \mathfrak{K} : \mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$

2) $[\forall x \in \mathrm{R}\ f(x) \geq 0] \Longrightarrow \mu(f) \geq 0$

De plus : Si $f \in \mathfrak{K}$, alors $|f| \in \mathfrak{K}$ et : $|\mu(f)| \leq \mu(|f|)$

5 Suites de Cauchy en moyenne de fonctions à support compact

5.1 Norme en moyenne sur $\mathfrak{K}$

Théorème 5.1 *L'application $f \mapsto \mu(|f|)$ de $\mathfrak{K}$ dans* R^+*est une norme sur l'espace vectotiel $\mathfrak{K}$*

Démonstration :

1) $\mu(|f|) = 0 \Longleftrightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

2) $\forall f, g \in \mathfrak{K} : \mu(|f+g|) = \int_a^b |f+g|\,(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx$ donc $\mu\left(|f+g|\right) \leq \mu(|f|) + \mu(|g|)$

3) $\forall f \in \mathfrak{K}\ \forall \lambda \in \mathrm{R} : \mu(|\lambda f|) = |\lambda|\,\mu(|f|)$

Définition 5.2 *L'application $f \longrightarrow \mu(|f|)$ ainsi définie est la* norme de la convergence en moyenne sur$\mathfrak{K}$

(Rappel : une autre norme sur $\mathfrak{K}$ est la norme de la convergence uniforme, définie sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur R (dont $\mathfrak{K}$ esr un sous-espace vectoriel) par $||f|| = \sup\limits_{x \in \mathrm{R}} |f(x)|$).

5.2 Suite de Cauchy en moyenne de fonctions à support compact

Définition 5.3 *Une suite* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *d'éléments de* $\mathfrak{K}$ *est dite* de Cauchy en moyenne *si et seulement si elle est de Cauchy pour la norme de la convergence en moyenne, i.e. elle vérifie :*

$\forall\varepsilon \succ 0\ \exists n_0 : [n, p \geq n_0 \Longrightarrow \mu(|f_n - f_p|) \prec \varepsilon]$

Remarque 5.4 $\mathfrak{K}$ *n'est pas complet pour la norme de la convergence en moyenne.*

Propriété 5.5 *1) Soit* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *une suite de Cauchy en moyenne d'éléments de* $\mathfrak{K}$*. Alors : la suite* $(\mu(f_n))_{n\in\mathrm{N}}$ *de réels converge dans* R *(en effet :* $|\mu(f_n) - \mu(f_p)| = |\mu(f_n - f_p)| \leq \mu(|f_n - f_p|)$ *donc la suite* $(\mu(f_n))_{n\in\mathrm{N}}$ *est de Cauchy dans* R.

2) Soit $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *une suite de Cauchy en moyenne d'éléments de* $\mathfrak{K}$*. Alors la suite* $(|f_n|)_{n\in\mathrm{N}}$ *est aussi de Cauchy en moyenne (en effet* $\mu(||f_n| - |f_p||) \leq \mu(|f_n - f_p|)$*)*

Remarque 5.6 *1) Les suites de Cauchy en moyenne forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de fonctions de* $\mathfrak{F}$ *(par* $(f_n) + (g_n) = (f_n + g_n)$ *et* $\lambda(f_n) = (\lambda f_n)$*) ; on le note* $\mathrm{Cauch}_{\mathfrak{K}}$*.*

2) Soit $(f_n)_{n\in\mathrm{N}} \in \mathrm{Cauch}_{\mathfrak{K}}$*. D'après ci-dessus :* $(\mu(f_n))$ *converge dans* R*. On note :* $\mathfrak{I}((f_n)) = \lim \mu(f_n)$

3) L'application $\mathfrak{I} : \mathrm{Cauch}_{\mathfrak{K}} \longrightarrow \mathrm{R} : (f_n)_{n\in\mathrm{N}} \mapsto \mathfrak{I}((f_n))$ *est une forme linéaire sur* $\mathrm{Cauch}_{\mathfrak{K}}$*.*

6 L'espace $\mathfrak{L}^1$

Définition 6.1 *(et notation)*

Soit $f \in \mathfrak{F}$ *.* f *est dite* intégrable au sens de Lebesgue*, ou* Lebesgue-intégrable *(ou* L-intégrable) *si et seulement si : il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}} \in \mathrm{Cauch}_{\mathfrak{K}}$ *telle que* (f_n) *converge presque-partout vers* f *(i.e.*$\lim f_n(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{R} - \mathrm{E}$ *avec* E *négligeable).*

L'ensemble des fonctions L-intégrables forme un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}$*, que l'on note* $\mathfrak{L}^1$*.*

Théorème 6.2 *Soit* $f \in \mathfrak{L}^1$*. Le nombre* $\mathfrak{I}((f_n))$ *est indépendant du choix de la suite* $(f_n) \in \mathrm{Cauch}_{\mathfrak{K}}$ *convergeant presque-partout vers* f*.*

Notation 6.3 *Ce nombre commun* $\mathfrak{I}((f_n))$ *est* l'intégrale de Lebesgue de $f \in \mathfrak{L}^1$ *; on le note* $\int_{\mathrm{R}} f$*.*

Cas particulier : Si $f \in \mathfrak{K}$, alors f est limite (partout) de la suite constante $(f)_{n\in\mathrm{N}} \in \mathrm{Cauch}_{\mathfrak{K}}$; donc $f \in \mathfrak{L}^1$: $\mathfrak{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}^1$; de plus :$\forall f \in \mathfrak{K} : \int_{\mathrm{R}} f = \mu(f)$. Donc : l'application $f \mapsto \int_{\mathrm{R}} f$ de $\mathfrak{L}^1$ dans R est un prolongement de la mesure de Lebesgue sur R.

Théorème 6.4 *Les fonctions continues par intervalles sur* R *sont L-intégrables*

7 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

1) Si $f \in \mathfrak{L}^1$, alors $|f| \in \mathfrak{L}^1$ (en effet, f est limite presque-partout de $(f_n) \in$ C$auch_{\mathfrak{K}}$; donc $|f|$ est limite presque-partout de $(|f_n|)_{n\in\mathrm{N}}$, et $(|f_n|)_{n\in\mathrm{N}} \in$ C$auch_{\mathfrak{K}}$ (propriété vue plus haut)) ; de plus, on a :$\left|\int_{\mathrm{R}} f\right| \leq \int_{\mathrm{R}} |f|$ (par $|\mu(f_n)| \leq \mu(|f_n|)$)

2) L'application $f \mapsto \int_{\mathrm{R}} f$ est une forme linéaire positive sur $\mathfrak{L}^1$

3) On nomme *négligeable* une fonction $f \in \mathfrak{F}$ nulle presque-partout. Alors :

a) f négligeable $\Longleftrightarrow \left[f \in \mathfrak{L}^1 \text{ et } \int_{\mathrm{R}} |f| = 0\right]$

b) L'ensemble $\mathfrak{N}$ des fonctions négligeables est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}^1$

c) L'ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{R}$ est négligeable si et seulement si sa fonction caractéristique χ_{A} est négligeable.

8 Semi-norme sur $\mathfrak{L}_1$. Théorème de Lebesgue

Rappel : Une *semi-norme* sur un K-espace vectoriel E (K est R ou C) est une application $p : \mathrm{E} \to \mathrm{R}^+$ telle que :

$$\begin{cases} \forall u, v \in \mathrm{E} : p(u+v) = p(u) + p(v) \\ \forall \alpha \in \mathrm{K}\ \forall u \in \mathrm{E} : p(\alpha u) = |\alpha|\, p(u) \end{cases}$$

(p a donc toutes les propriétés d'une norme, sauf l'équivalence : $p(u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$)

Théorème 8.1 *L'application de* $\mathfrak{L}_1$ *dans* R^+ *définie par* $f \longmapsto \int_{\mathrm{R}} |f|$ *est une semi-norme sur le* R- *espace vectoriel* $\mathfrak{L}_1$. *On l'appelle* semi-norme de la convergence en moyenne.

Définition 8.2 *La terminologie associée à une métrique se retrouve pour une semi-norme. Par exemple :*

1) Une suite (f_n) *d'éléments de* $\mathfrak{L}_1$ *est dite* de Cauchy en moyenne *si et seulement si :*

$\forall \varepsilon \succ 0\ \exists\, n_0 \in \mathrm{N} : n, p \succ n_0 \Longrightarrow \int_{\mathrm{R}} |f_n - f_p| \prec \varepsilon$

2) Une suite (f_n) *d'éléments de* $\mathfrak{L}_1$ tend vers $f \in \mathfrak{L}_1$en moyenne *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathrm{R}} |f - f_n| = 0$

Théorème 8.3 *Soit* $f \in \mathfrak{L}^1$ *: toute suite de Cauchy en moyenne qui converge presque-partout vers* f *converge vers* f *en moyenne.*

Théorème 8.4 *Théorème de Lebesgue (ou de la convergence dominée)*

Soit $\varphi \in \mathfrak{L}_1$. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $\mathfrak{L}_1$ *convergeant presque-partout sur* R *vers* f *et telle que :* $\forall n \in \mathrm{N} : |f_n| \leq \varphi$. *Alors :*

$f \in \mathfrak{L}_1$ *;* (f_n) *converge en moyenne vers* f *; et* $\lim \int_{\mathrm{R}} f_n = \int_{\mathrm{R}} f$

9 L'espace L^1

Notation 9.1 *On note* $\mathrm{L}^1 = \dfrac{\mathfrak{L}^1}{\mathfrak{N}}$ *(espace vectoriel-quotient de* $\mathfrak{L}^1$ *par le sous-espace* $\mathfrak{N}$ *des fonctions négligeables : un élément de* L^1*, classe d'une fonction* $f \in \mathfrak{L}^1$*, est l'ensemble des fonctions de* $\mathfrak{L}^1$ *égales presque-partout à* f*).*

Propriété 9.2 *(et notation)*

Si f et g sont deux fonctions de $\mathfrak{L}^1$ égales presque-partout : $\int_{\mathrm{R}} f = \int_{\mathrm{R}} g$ (puisque $\left|\int_{\mathrm{R}} (f-g)\right| \leq \int_{\mathrm{R}} |f-g| = 0$).

D'où la notation, si $\Phi \in \mathrm{L}^1$: $\int_{\mathrm{R}} \Phi = \int_{\mathrm{R}} f$ (f étant un quelconque élément de Φ).

Propriété 9.3 *1) Puisque l'application $f \longmapsto \int_{\mathrm{R}} f$ est une forme linéaire positive sur $\mathfrak{L}^1$, l'application : $\mathrm{L}^1 \to \mathrm{R} : \Phi \mapsto \int_{\mathrm{R}} \Phi$ est une forme linéaire sur L^1.*

2) Soient $f, g \in \Phi$: alors $\int |f| = \int |g|$; l'application $\mathrm{F} : \mathrm{L}^1 \to \mathrm{R}^+ : \Phi \longmapsto \int_{\mathrm{R}} |f|$ (avec f élément quelconque de Φ) est une norme sur L^1 : en effet, c'est une semi-norme par passage au quotient de la semi-norme $f \longmapsto \int_{\mathrm{R}} f$ sur $\mathfrak{L}^1$; et de plus : $\mathrm{F}(\Phi) = 0 \Longrightarrow \int_{\mathrm{R}} |f| = 0 \Longrightarrow f \in \mathfrak{N} \Longrightarrow \Phi = 0$ (classe de la fonction nulle sur R).

Cette norme est nommée *norme de la convergence en moyenne sur* L^1

Théorème 9.4 *Théorème de Fischer-Riesz*

L'espace vectoriel L^1 est complet pour la norme de la convergence en moyenne.

10 Fonctions Lebesgue-intégrables sur une partie A de R

Définition 10.1 *1) Soit $f : \mathrm{D}_f \to \mathrm{R}$. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{D}_f$. f est dite* Lebesgue-intégrable (ou L-intégrable) sur A *si et seulement si la fonction g définie par :*

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in \mathrm{A} \\ g(x) = 0 \text{ si } x \in \mathrm{R} - \mathrm{A} \end{cases} \quad \text{est L-intégrable.}$$

2) Dans ce cas, l'intégrale de Lebesgue de f *sur* A *est le nombre $\int_{\mathrm{R}} g$; on le note $\int_{\mathrm{A}} f$. L'ensemble des fonctions L-intégrables sur A est noté $\mathfrak{L}^1(\mathrm{A})$; c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur A.*

Théorème 10.2 *Toute fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$; de plus : $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$*

Remarque 10.3 *Une fonction de $\mathfrak{L}^1([a,b])$, même bornée sur $[a,b]$, peut n'être pas Riemann-intégrable sur $[a,b]$.*

Exemple :

Soit la fonction χ_{Q} caractéristique de l'ensemble Q des rationnels, et un intervalle $[a,b]$ quelconque :

* Cette fonction n'est continue en aucun point de $[a,b]$ et n'est donc pas R-intégrable (l'ensemble de ses points de discontinuité sur $[a,b]$ nétant pas négligeable).

* La fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \chi_{\mathrm{Q}}(x) \text{ si } x \in [a,b] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

est négligeable : en effet, $f = \chi_{\mathrm{Q} \cap [a,b]}$; or $\mathrm{Q} \cap [a,b]$ est dénombrable donc négligeable ; f est donc L-intégrable (et d'intégrale nulle) et donc χ_{Q} est L-intégrable sur $[a,b]$.