Homographies et suites récurrentes

1 Une méthode classique

Commençons par exposer une méthode classique pour l'étude de certaines suites récurrentes. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par une formule du type

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec f de la forme $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ ($c \neq 0$ sinon l'étude est triviale), alors de deux choses l'une :

- Soit la fonction f admet deux points fixes α et β, auquel cas on étudie la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$, et l'on s'aperçoit rapidement que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
- Sinon f n'a qu'un seul point fixe α, auquel cas on étudie la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$, qui est alors une suite arithmétique.

Exemple : Soit à étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2u_n}$$

On commence par chercher les points fixes de $f : z \mapsto \dfrac{z+3}{2z}$. Ceux-ci sont les racines de l'équation $z + 3 = z(2z)$, c'est-à-dire -1 et $3/2$. On étudie donc la suite de terme général $\dfrac{u_n + 1}{u_n - 3/2}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 3/2} &= \frac{\dfrac{u_n + 3}{2u_n} + 1}{\dfrac{u_n + 3}{2u_n} - 3/2} \\
&= \left(\frac{-3}{2}\right) \frac{u_n + 1}{u_n - 3/2}
\end{aligned}$$

Par récurrence, on a immédiatement $\dfrac{u_n + 1}{u_n - 3/2} = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^n \dfrac{u_0 + 1}{u_0 - 3/2}$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_n + 1}{u_n - 3/2} \right| = +\infty$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3/2$$

Cette méthode est certes efficace, mais on ne comprend pas bien pourquoi elle marche ! On sait que la recherche des points fixes de la fonction permet de déterminer vers quoi la suite définie par récurrence peut tendre, si elle converge. En revanche, il est plus surprenant que cette méthode nous donne à coup sûr le comportement de la suite.

2 Pourquoi cette méthode ?

2.1 Droite projective et homographies

Définition Une *homographie* est une fonction de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

où a, b, c et d sont des nombres complexes, tels que $ad - bc \neq 0$. (Sinon, f est une fonction constante...)

N.B. On obtient bien sûr la même fonction en multipliant tous les coefficients par un même facteur non nul.

Définition On rajoute à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes un point nommé ∞, et l'on notera S l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

S sera appelé *droite projective complexe*, et notée $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$.

Soit f une homographie. On prolonge f à S tout entier en posant :

$$f(\infty) = \begin{cases} \dfrac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Et comme, pour $c \neq 0$, la fonction n'était pas définie en $-\dfrac{d}{c}$, on la prolonge alors en ce point en posant $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$.

Théorème 2.1 *Toute homographie réalise une bijection de* S *sur* S.

Démonstration : Soit $f : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie, prolongée à S de la manière précédemment décrite.

Le cas $c = 0$ est trivial : f est alors une application affine, donc réalise une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. Comme on la prolonge alors par $f(\infty) = \infty$, on obtient bien une bijection de S sur S. On se place donc désormais dans le cas $c \neq 0$.

On a alors prolongé f en posant $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$ et $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$.

- Tout élément de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ a bien sûr une image dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que le point ∞ possède un et un seul antécédent par f, qui est $-\dfrac{d}{c}$.
- Un complexe $z \neq -\dfrac{d}{c}$ a pour image $\dfrac{a}{c}$ si et seulement si

  $$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \iff c(az+b) = a(cz+d) \iff bc = ad$$

  Or, on a justement précisé dans la définition d'une homographie que les complexes a, b, c et d vérifient $ad - bc \neq 0$. Donc a/c ne peut avoir d'antécédent dans $\mathbb{C}$, et donc possède un et un seul antécédent par f, qui est le point ∞.

- Soit enfin α un complexe différent de $\frac{a}{c}$. Un complexe $z \neq -\frac{d}{c}$ a pour image α si et seulement si

$$\frac{az+b}{cz+d} = \alpha \Longleftrightarrow (a - \alpha c)\, z = d\alpha - b$$

Comme $\alpha \neq \frac{a}{c}$, on a également $a - \alpha c \neq 0$, et donc l'équation admet une et une seule solution dans $\mathbb{C}$, qui est le complexe $\frac{d\alpha - b}{a - \alpha c}$.

On a montré que tout élément de S admet un unique antécédent par f.

□

Corollaire 2.2 *La composée de deux homographies est une homographie.*

Démonstration : En effet, un calcul élémentaire nous montre que la composée de deux homographies f et g est encore de la forme :

$$f \circ g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

La seule chose à montrer est que cette composée vérifie encore $ad - bc \neq 0$. Mais le cas contraire signifierait que $f \circ g$ est constante sur S. Et comme f et g sont toutes deux des bijections de S (théorème précédent), leur composée est encore bijective ; en particulier $f \circ g$ ne peut être constante, et donc vérifie la condition $ad - bc \neq 0$.

□

2.2 Action des homographies, points fixes

Théorème 2.3 *Soient α, β et γ trois points distincts de* S. *Il existe une unique homographie f vérifiant :*

$$f(\alpha) = 0, \quad f(\beta) = 1, \quad f(\gamma) = \infty$$

Démonstration : Il s'agit de trouver quatre complexes a, b, c et d vérifiant :

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = 0, \quad \frac{a\beta + b}{c\beta + d} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d} = \infty$$

Supposons tout d'abord que α, β et γ sont tous différents de ∞.

La première équation nous donne alors $a\alpha + b = 0$ donc $b = -a\alpha$. La troisième nous donne quant à elle $\gamma = -d/c$ soit $d = -c\gamma$.

Remplaçant ces coefficients dans la seconde équation, on obtient

$$\frac{a\,(\beta - \alpha)}{c\,(\beta - \gamma)} = 1$$

ce qui détermine le rapport a/c, et donc les nombres a, b, c et d (à constante multiplicative près).

Reste à étudier le cas où l'un des nombres α, β et γ est l'élément ∞.

- Si $\alpha = \infty$, la première équation $f(\infty) = 0$ nous donne en fait $a/c = 0$ donc $a = 0$. La deuxième équation devient alors, après remplacement :

$$\frac{b}{c\,(\beta - \gamma)} = 1$$

ce qui détermine les nombres b, c et d à constante multiplicative près.

- Si $\beta = \infty$, on obtient $a/c = 1$, et donc a, b, c et d sont déterminés (toujours à constante multiplicative près).
- Enfin, si $\gamma = \infty$, on a nécessairement $c = 0$. Reste à déterminer une fonction affine envoyant les complexes α et β sur 0 et 1 respectivement, fonction qui existe et est unique.

$\square$

Corollaire 2.4 *Toute homographie est inversible, et l'inverse d'une homographie est une homographie.*

Démonstration : Le fait que les homographies soient inversibles, en tant que fonctions de S dans S, est évident : ce sont des bijections de S, elles admettent donc des bijections réciproques. Reste à montrer que la réciproque d'une homographie est aussi une homographie.

Soit donc f une homographie. On pose $\alpha = f(0)$, $\beta = f(1)$ et $\gamma = f(\infty)$.

D'après le théorème, il existe une unique homographie g telle que :

$$g(\alpha) = 0, \quad g(\beta) = 1, \quad g(\gamma) = \infty$$

Mais alors, on a $g \circ f(0) = 0$, $g \circ f(1) = 1$ et $g \circ f(\infty) = \infty$. Toujours d'après le théorème, il existe une unique homographie envoyant les points $0, 1, \infty$ sur $0, 1, \infty$. L'identité possède bien sûr cette propriété, et donc

$$g \circ f = \mathrm{Id}$$

ce qui montre que g est la fonction réciproque de f : $g = f^{-1}$.

$\square$

Théorème 2.5 *Toute homographie différente de l'identité admet exactement* 1 *ou* 2 *point fixes dans* S.

Démonstration : Soit a, b, c et d des complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$, et f l'homographie

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Si $c \neq 0$, l'équation $f(z) = z$ équivaut à $az + b = z\,(cz + d)$, c'est-à-dire à une équation polynomiale de degré 2, qui admet en général 2 solutions dans $\mathbb{C}$, une seule lorsque l'on a une racine double.

Sinon, ∞ est un point fixe de f. Quitte à multiplier les nombres a, b et d par un même facteur, on peut supposer $d = 1$. L'équation $f(z) = z$ est donc de la forme $az + b = z$. Soit f est l'identité, soit cette équation admet au plus une solution dans $\mathbb{C}$, et l'on a là encore, au total, 1 ou 2 points fixes.

$\square$

2.3 Homographies à un seul point fixe

L'étude précédente des différents cas nous fournit sans trop d'effort la :

Propriété 2.6 *Les homographies ayant ∞ pour seul point fixe sont de la forme*

$$z \mapsto z + b \quad \textit{avec } b \neq 0$$

Démonstration : On a vu en effet que, si $c \neq 0$, alors on a au moins un point fixe dans $\mathbb{C}$. Une homographie ayant ∞ pour seul point fixe est donc de la forme $z \mapsto az + b$.

Mais si $a \neq 1$, alors $\dfrac{b}{1-a}$ est point fixe. Donc nécessairement $a = 1$. Enfin $b \neq 0$ sinon f est l'identité, donc admet beaucoup de points fixes...

$\square$

Théorème 2.7 *Soit f une homographie ayant un seul point fixe. Alors il existe une homographie ω et une constante* C *telle que*

$$\forall z \in \mathrm{S}, \quad f\left(\omega(z)\right) = \omega\left(z + \mathrm{C}\right)$$

Démonstration : Soit donc f une homographie n'ayant qu'un seul point fixe α, et ω une homographie envoyant ∞ sur α (une telle homographie existe, prendre pour cela l'inverse d'une homographie envoyant α sur ∞, ce qui existe d'après le théorème 2.3).

Considérons l'homographie $\omega^{-1} \circ f \circ \omega$. On a $\omega(\infty) = \alpha$, donc $f \circ \omega(\infty) = \alpha$, et donc :

$$\omega^{-1} \circ f \circ \omega\left(\infty\right) = \infty$$

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $y = \omega(x)$. Comme ω est une bijection de S, on a nécessairement $y \neq \alpha$ (sinon α aurait deux antécédents par ω, à savoir x et ∞).

Mais alors, α étant le seul point fixe de f, on a $f(y) \neq y$. Par injectivité de ω^{-1}, on a donc $\omega^{-1}\left(f(y)\right) \neq \omega^{-1}(y)$, c'est-à-dire

$$\omega^{-1} \circ f \circ \omega(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

On a montré que l'homographie $\omega^{-1} \circ f \circ \omega$ a pour seul point fixe ∞. D'après la propriété précédente, c'est donc une translation, de la forme $z \mapsto z + \mathrm{C}$ (avec C un complexe non nul).

On a bien montré que pour tout z, on a $f\left(\omega(z)\right) = \omega\left(z + \mathrm{C}\right)$.

$\square$

Application : explication de notre méthode dans le cas d'un point fixe double.

Soit donc à étudier la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une homographie n'ayant qu'un seul point fixe α.

L'homographie $z \mapsto \dfrac{1}{z-\alpha}$ envoie α sur ∞. Elle convient donc pour jouer le rôle de ω^{-1} dans la démonstration qui précède. Il existe donc un complexe C non nul tel que l'on ait

$$\forall z \in \mathrm{S}, \quad \omega^{-1} \circ f \circ \omega(z) = z + \mathrm{C}$$

Composant à droite par l'homographie ω^{-1}, on obtient

$$\forall z \in \mathrm{S}, \quad \omega^{-1} \circ f(z) = \omega^{-1}(z) + \mathrm{C}$$

Autrement dit, il existe une constante C telle que pour tout élément z de S, on ait :

$$\boxed{\frac{1}{f(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \mathrm{C}}$$

Et donc la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite arithmétique.

2.4 Homographies à deux points fixes

Commençons là aussi par étudier une classe particulière d'homographies à deux points fixes : celle qui fixent 0 et ∞.

Propriété 2.8 *Les homographies ayant pour points fixes* 0 *et* ∞ *sont de la forme :*

$$z \mapsto az \quad \textit{avec } a \neq 1$$

Démonstration : Soit en effet $f : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ une telle homographie. La condition $f(0) = 0$ nous donne $b = 0$, la condition $f(\infty) = \infty$ nous donne $c = 0$.

f est donc de la forme $z \mapsto az$. Si enfin $a = 1$, c'est que f est l'identité, auquel cas f possède bien d'autres points fixes...

□

Théorème 2.9 *Soit* f *une homographie ayant deux points fixes. Alors il existe une homographie* ω *et une constante* C *telle que*

$$\forall z \in \mathrm{S}, \quad f(\omega(z)) = \omega(\mathrm{C}z)$$

Démonstration : Soit donc f une homographie ayant deux points fixes α et β. Soit ω une homographie envoyant 0 sur α et ∞ sur β.

Alors $$\omega^{-1} \circ f \circ \omega(0) = \omega^{-1} \circ f(\alpha) = \omega^{-1}(\alpha) = 0$$

De même $$\omega^{-1} \circ f \circ \omega(\infty) = \infty$$

L'homographie $\omega^{-1} \circ f \circ \omega$ possède pour points fixes 0 et ∞, c'est donc une homothétie $z \mapsto \mathrm{C}z$. On a bien montré qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall z \in \mathrm{S}, \quad f(\omega(z)) = \omega(\mathrm{C}z)$$ □

Application : explication de notre méthode dans le cas de deux points fixes.

Soit donc à étudier la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une homographie ayant deux points fixes α et β.

L'homographie $z \mapsto \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ envoie α sur 0 et β sur ∞. Elle convient donc en tant que ω^{-1} dans la démonstration qui précède. C'est-à-dire qu'il existe un complexe C non nul tel que l'on ait

$$\forall z \in \mathrm{S}, \quad \omega^{-1} \circ f \circ \omega(z) = \mathrm{C}z$$

Composant à droite par l'homographie ω^{-1}, on obtient

$$\forall z \in \mathrm{S}, \quad \omega^{-1} \circ f(z) = \mathrm{C}\omega^{-1}(z)$$

Autrement dit, il existe une constante C telle que pour tout élément z de S

$$\boxed{\frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta} = \mathrm{C}\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$$

Ceci montre que la suite de terme général $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est géométrique.

3 Qu'est-ce que $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$?

Nous avons défini dans la précédente partie $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{C}$ augmenté d'un point à l'infini. Une représentation géométrique possible de $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ consiste à considérer le plan complexe avec un « point à l'infini », qui se ramène en fait à une sphère (dans l'espace à 3 dimensions), la *sphère de Riemann* : on passe de l'un à l'autre de ces modèles par projection stéréographie à partir d'un point de la sphère.

Cette définition est donc parfaitement légitime, mais pas entièrement satisfaisante. Le modèle de la sphère, par exemple, nous conduit à nous demander ce que le point à l'infini a de spécial par rapport aux autres. D'ailleurs, les homographies doivent être définies d'une manière particulière au point ∞, et pourtant rien ne le distingue ensuite : il peut être envoyé sur n'importe quel point de $\mathbb{C}$ par une homographie, tout point de $\mathbb{C}$ peut quant à lui être envoyé sur ∞. Bref, les homographies sont des transformations de $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ qui « changent » de point à l'infini.

Une « bonne » façon de se représenter $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ est de le voir comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$. Étant donnée une base de $\mathbb{C}^2$, une droite vectorielle peut être définie par un couple non nul (x_1, x_2) de complexes : la droite vectorielle engendrée est l'ensemble des multiples du vecteur c'est-à-dire l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{C} \right\}$$

Et toute droite vectorielle est de cette forme là.

Mais alors, on est tenté d'aller plus loin, et de caractériser notre droite par le seul rapport x_1/x_2, celui-ci ne dépendant pas du représentant de la droite choisi (il est invariant par multiplication par une constante). Mais cette représentation nous impose de distinguer une droite particulière, celle engendrée par le couple $(1, 0)$, puisque le rapport $1/0$ n'est *a priori* pas défini. On ajoute alors à $\mathbb{C}$ un point supplémentaire, noté ∞.

Enfin, cette représentation dépend de la base de $\mathbb{C}^2$ choisie au départ. Si l'on change de base, on change de point à l'infini.

Définition Lorsque l'on représente un point de $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ par un couple de complexe (x_1, x_2), on parle de *coordonnées homogènes* de ce point. Sa représentation par le rapport x_1/x_2 correspond à une *coordonnée non homogène.*

Regardons maintenant ce qu'il advient des applications linéaires lorsque l'on passe de $\mathbb{C}^2$ à $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$. Cette question est légitime car, par linéarité justement, une application linéaire f de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ envoie une droite vectorielle sur une droite vectorielle, ou alors sur le point $(0, 0)$. C'est-à-dire que f définit une application de $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ (non définie en les droites envoyées sur le point $(0, 0)$).

Mais ce dernier cas n'est justement pas très intéressant : lorsqu'une droite vectorielle est envoyée sur le point $(0, 0)$, cela signifie que l'application linéaire f est de rang au plus 1, c'est-à-dire à valeur dans une droite vectorielle. Dans $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$, cela signifie que toutes les droites vectorielles (sauf celle qui est envoyée sur $(0, 0)$) sont envoyées sur la même droite, c'est-à-dire que l'application est constante sur son domaine de définition.

Nous nous intéressons donc uniquement aux applications linéaires de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ injectives, à savoir les applications linéaire de déterminant non nul. Celles-ci définissent une fonction de $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$, définie sur $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ tout entier.

Si l'on représente une application linéaire f par sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$, ceci revient à considérer les matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0$$

Cette condition doit déjà nous rappeler quelquechose, à propos des homographies ! On s'était déjà restreint à celles qui vérifient $ad - bc \neq 0$, les autres étant constantes sur leur domaine de définition... Si l'on revient à la coordonnée non homogène $z = x_1/x_2$, voyons ce qu'il advient des applications linéaires.

L'application linéaire f de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transforme le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en le vecteur $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$, l'application correspondante de $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ transforme donc $z = x_1/x_2$ en

$$\frac{ax_1 + bx_2}{cx_1 + dx_2} = \frac{az + b}{cz + d}$$

C'est-à-dire que les homographies ne sont rien d'autres que les applications de $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ correspondant aux applications linéaires dans $\mathbb{C}^2$. Deux application multiples l'une de l'autre définissent sur $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ la même application, puisque la multiplication par une constante (non nulle) laisse les droites vectorielles invariantes. On retrouve ainsi l'idée que les nombres a, b, c et d définissant une homographie sont déterminés à un facteur multiplicatif commun près.

Tous les résultats de la deuxième partie s'interprètent alors facilement. Soit f une application linéaire et $\tilde{f}$ l'homographie associée.

- Les points fixes de $\tilde{f}$ correspondent aux droites vectorielles fixées par f, c'est-à-dire aux droites engendrées par les vecteurs propres de f. Or une application linéaire f de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ qui n'est pas une homothétie admet exactement un ou deux vecteurs propres (à constante multiplicative près), selon que f est diagonalisable ou non.
  Donc $\tilde{f}$ a exactement un ou deux points fixes.

- Soient α, β et γ trois points distincts de $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$. Ces points correspondent dans $\mathbb{C}^2$ à des droites vectorielles distinctes. Soit u, v et w des vecteurs directeurs de ces droites. (u, w) forme une base de $\mathbb{C}^2$, donc il existe λ et μ deux complexes tels que $v = \lambda u + \mu w$.
  L'application linéaire f qui envoie le vecteur $(0, 1)$ sur λu et le vecteur $(1, 0)$ sur μw envoie donc par linéarité le vecteur $(1, 1)$ sur $\lambda u + \mu w = v$. Dans $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$, cela signifie que l'homographie $\tilde{f}$ associée à f envoie 0 sur α, 1 sur β et ∞ sur γ.
  Réciproquement, une homographie vérifiant cette propriété est unique à constante multiplicative près. En effet, si l'on considère l'application linéaire f associée, les directions des vecteurs images des vecteurs de base sont imposées, ainsi que la direction de l'image de la somme de ces vec-

teurs. Et ceci détermine une application linéaire, à constante multiplicative près.

- Lorsque $\tilde{f}$ admet deux points fixes, l'application f a deux vecteurs propres non colinéaires, donc est diagonalisable. Si l'on prend pour base de $\mathbb{C}^2$ une base de vecteurs propres de f, alors dans cette base, la droite engendrée par un vecteur (x_1, x_2) sera envoyée par f sur la droite engendrée par $(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de f.
  Dans $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$, cela signifie que le point x_1/x_2 sera envoyé sur le point $(\lambda_1 x_1)/(\lambda_2 x_2)$: notre homographie $\tilde{f}$ est alors la multiplication par une constante, *dans la coordonnée non homogène définie.*
  En effet, nous nous sommes placés dans une base de $\mathbb{C}^2$ adaptée à f, base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Si l'on note M la matrice de f dans la base canonique, M' la matrice de f dans cette base, et P la matrice de passage de la base canonique à cette base, on a $\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$. En terme d'homographie, cela signifie que, si l'on appelle ω l'homographie correspondant à la matrice P, alors $\omega^{-1} \circ \tilde{f} \circ \omega$ est l'homographie associée à M'. C'est donc une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que
  $$\omega^{-1} \circ \tilde{f} \circ \omega : z \mapsto \mathrm{C}z$$
  Et la constante C est, d'après ce qui précède, le rapport des deux valeurs propres de l'application linéaire f associée à $\tilde{f}$.
- De la même façon, lorsque $\tilde{f}$ n'a qu'un seul point fixe, cela signifie que l'application linéaire f n'a qu'un seul vecteur propre. Dans une base adaptée (on prend ce vecteur propre comme premier vecteur de base), f a alors une matrice de la forme :
  $$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
  Quitte à multiplier f par une constante, on peut également supposer $\lambda = 1$. Dans cette base, la droite engendrée par un vecteur (x_1, x_2) sera envoyée par f sur la droite engendrée par $(x_1 + \mu x_2, x_2)$.
  Dans $\mathrm{P}_1(\mathbb{C})$, cela signifie que le point x_1/x_2 sera envoyé sur le point $x_1/x_2 + \mu$: l'homographie $\tilde{f}$ est alors une translation. Si ω désigne l'homographie correspondant à la matrice de changement de base, on a donc une constante C telle que
  $$\omega^{-1} \circ \tilde{f} \circ \omega : z \mapsto z + \mathrm{C}$$

Conclusion : Derrière cette méthode extrêmement classique, enseignée comme une « recette » à nombre d'étudiants, se cache un domaine des mathématiques on ne peut plus vaste. Nous n'avons présenté ici qu'une toute petite introduction à la géométrie projective, dans les cas bien particulier de la droite projective complexe. Pour une étude plus détaillée de celle-ci, on pourra se reporter à [1], qui étudie également les dimensions supérieures, et relie la géométrie projective aux géométries riemanniennes, hyperboliques et elliptiques. On trouvera des introductions plus générales à la géométrie projective dans [2] (approche plus « géométrique » justement, par le biais de résultats de géométrie classique du plan) ou dans [3] (approche par l'algèbre linéaire).

Références

[1] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Gauthier-Villars, 1931.

[2] H. Coxeter, *Projective Geometry*, Springer, 1987.

[3] K. Borsuk, *Foundations of geometry*, North-Holland, 1980.