Encore un peu d'Equirépartition

François Lo Jacomo

http://dma.ens.fr/culturemath

Ce texte fait suite à l'article de Culture*MATH* intitulé *Equirépartition d'une suite de nombres.*

Nous y parlions de la répartition des premiers chiffres de 2^n, et on peut évoquer à ce sujet un résultat qui est également conséquence de la théorie de l'équirépartition développée dans l'article en question.

Proposition 1 *Soit $A \in \mathbb{N}$, alors il existe une infinité de puissances de 2 dont les premiers chiffres forment l'entier A.*

En effet, notons (logarithmes décimaux)

$$a = log(A) - E(log(A)) \quad et \quad b = log(A+1) - E(log(A+1))$$

Alors les premiers chiffres de 2^n forment A si et seulement si

$$log(2^n) - E(log(2^n)) = n.log(2) - E(n.log(2)) \in [a, b[$$

Or, comme on l'a vu, la suite $(n.log(2))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1, ce qui implique que le cardinal de l'ensemble

$$E_n := \{k \leq n, \ tels\ que\ n.log(2) - E(n.log(2)) \in [a, b[\}$$

équivaut à $(b-a).n$ quand n tend vers l'infini, donc tend vers l'infini et peut être aussi grand qu'on veut.

CQFD !

Ce résultat peut aussi être démontré élémentairement. En effet, remarquons qu'ici, nous avons besoin finalement de moins d'informations que ce que nous fournit la notion d'équirépartition : on veut montrer qu'il existe un nombre infini d'éléments de la forme $n.log(2) - E(n.log(2))$ dans $[a, b[$, et on n'a pas réellement besoin de connaître un équivalent aussi précis que ce qu'on a utilisé.

Nous allons montrer élémentairement un résultat plus fort : pour TOUS a et b dans $[0, 1]$ avec $a < b$, il existe un entier n tel que

$$n.log(2) - E(n.log(2)) \in [a, b[$$

Autrement dit que la suite $n.log(2) - E(n.log(2))$ est *dense dans* $[0, 1]$.

En fait, on va même plus généralement montrer la proposition suivante (valable évidemment dans notre cas puisque $log(2)$ est irrationnel.)

Proposition 2 *Soit α un irrationnel, alors la suite $n.\alpha - E(n.\alpha)$ est dense dans* $[0, 1]$.

Soient a et b dans $[0, 1]$ avec $a < b$. Montrons qu'il existe un élément de la suite dans $[a, b]$.

Soit B un entier tel que $b - a > 1/B$, on divise l'intervalle $[0, 1[$ en B intervalles (ou tiroirs) $[k/B, (k + 1)/B[$.

Le principe des tiroirs permet alors d'affirmer que parmi les $B + 1$ multiples de α :

$$0,\ \alpha,\ 2.\alpha,\ \dots B.\alpha$$

deux au moins sont, modulo 1, dans un même tiroir.

Appelons-les $p.\alpha$ et $q.\alpha$, et posons alors

$$\varepsilon := (p - q)\alpha - E((p - q)\alpha).$$

On a donc $|\varepsilon| < b - a$.

De plus $\varepsilon > 0$ - sinon on aurait $(p - q)\alpha \in \mathbb{N}$ donc $\alpha \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux par hypothèse.

Appelons alors N le premier entier tel que $N.\varepsilon \geq a$. On a alors $(N - 1).\varepsilon < a$ et $N.\varepsilon - (N - 1).\varepsilon = \varepsilon < b - a$, ce qui implique que $N\epsilon \in [a, b[$.

Or :

$$N.\varepsilon = N.((p - q)\alpha - E((p - q)\alpha)) = N.(p - q)\alpha - E(N.(p - q)\alpha)$$

Il existe donc bien un élément de la suite $n.\alpha - E(n.\alpha)$ dans l'intervalle $[a, b[$, et le résultat est démontré.

Question : Quel est le premier n tel que 2^n commence par 123 ?