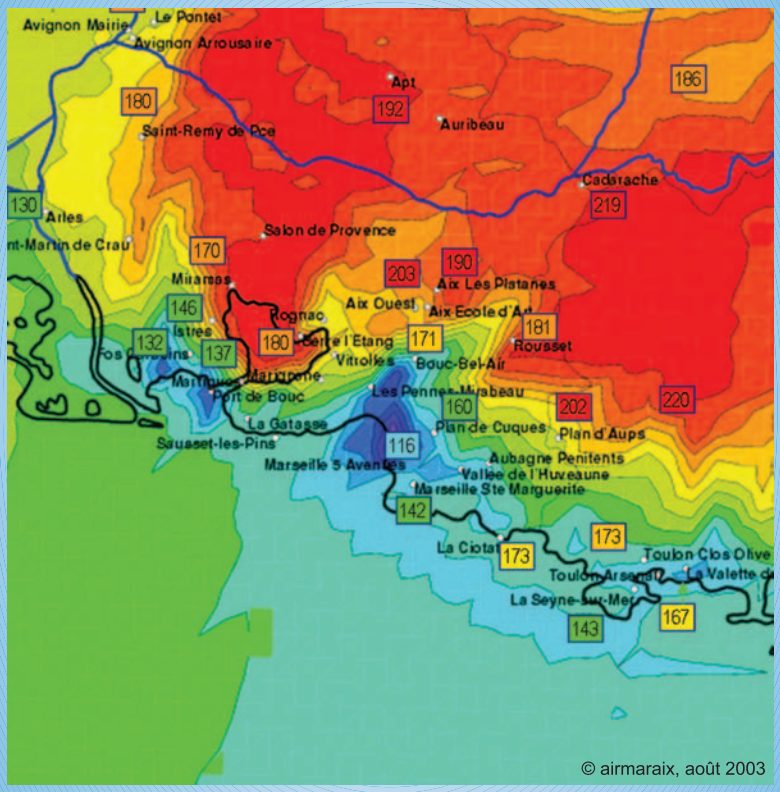
Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde



© airmaraix, août 2003

- Prévision statistique de pics de pollution
- Abraham de Moivre (1667-1754)
- Les intégrales de Coxeter
- Échecs hétérodoxes
- Coin des problèmes
- Compteurs

Magazine trimestriel n° 50
Octobre–Décembre 2003
ISSN 1142-2785 – 8 Euros

EDP SCIENCES

Les intégrales de Coxeter

par L.G. Vidiani*

La mort de Coxeter est survenue le 31 mars 2003, pendant la composition de cet article.

En juin 92, Michel Lafond, un des collègues astucieux et dynamiques, sachant formuler des sujets motivants et délectables donnant une âme au rallye de Bourgogne, m'interpellait sur la possibilité de justifier les valeurs des trois intégrales ci-dessous :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi^2}{24},$$
$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{8},$$
$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{11\pi^2}{72}\cdot$$

Les procédés usuels d'intégration que j'utilisai tout d'abord se sont révélés vains, tout comme l'utilisation des outils de classe préparatoire pour développer en série les premiers membres. Un calcul formel de primitive par le logiciel Derive (ou Maple) n'a rien donné non plus. Le théorème de Liouville (1875) sur les primitives semble prouver que les fonctions sous le signe *somme* n'ont pas de primitive parmi les fonctions classiques[1]. Puis, avec le même logiciel Derive, qui permet des calculs exacts avec 999 999 chiffres, je procédai successivement à une évaluation séparée à 10^{-20} près de chacun des deux membres : la coïncidence des décimales forgea ma conviction de l'exactitude du résultat.

Le collègue ci-dessus nommé me donna alors sa source [5] et, consultant la préface de ce livre, je compris alors la raison de la résistance des intégrales aux méthodes de calcul de *Mathématiques Spéciales* : leur évaluation n'est pas élémentaire !

Le but de cet article est de montrer comment justifier les valeurs obtenues.

Ces intégrales ont une histoire : En 1926, Coxeter, alors jeune chercheur qui travaillait sur le calcul des volumes de tétraèdres en théorie des cristaux, établit géométriquement et vérifia de manière approchée les égalités proposées ci-dessus. Il soumit alors aux lecteurs de la *Mathematical Gazette* [2] la question de la possibilité d'une démonstration « élémentaire ». Un seul lecteur répondit : Hardy, le découvreur de Ramanujan, qui donnait une réponse en quatorze pages, dont quatre de calculs (les autres concernaient les possibilités de généralisation).

Ces intégrales interviennent incidemment comme cas particuliers dans des calculs de Schläfli en théorie riemannienne et dans ceux de Lobatchevsky en théorie hyperbolique.

En tout cas, ces résultats montrent bien une des démarches de la recherche : on constate numériquement une coïncidence de résultats, la démarche finale consistant à démontrer formellement le résultat, et accessoirement à l'intégrer dans une théorie plus vaste.

Le professeur Coxeter me confirma, par retour du courrier[2], que les idées du calcul se trouvaient dans le premier chapitre du livre [5] précédemment cité. Mais l'indication se réduit à une note en page 12 et ni les valeurs particulières à utiliser, ni les changements de variables ne sont suggérés, fidèlement à la méthode américaine qui consiste à ne pas distraire de l'essentiel par des détails.

L'article qui suit se propose justement de donner les procédés qui permettent d'obtenir ces « détails »

* lg_vidiani@ipac.fr

[1] Un algorithme, basé sur le théorème de structure de Risch (1969), est maintenant implanté dans tous les logiciels de calcul formel et permet de décider si une fonction « élémentaire » a une primitive « élémentaire ».

[2] Avez-vous remarqué que les grands hommes, eux, répondent toujours par retour du courrier ? Un historique de ses travaux et deux portraits dont un en couleurs sont sur le site
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Coxeter.html

et, par la même occasion, de donner les valeurs d'une famille d'intégrales. Il n'utilise que les méthodes « élémentaires » du programme de la classe de *Mathématiques Spéciales* (mais pas évidentes non plus !)

Le plan est le suivant :

(I) Interprétation géométrique de la fonction de Schläfli ;

(II) Lien entre la fonction de Schläfli et l'intégrale de Baker, où l'on effectue les calculs publiés en anglais dans [5, pp. 6-10, 12-13] ;

(III) Justification des intégrales de Coxeter.

Seule cette dernière partie est originale, les changements de variable, les valeurs particulières utilisées n'étant à ma connaissance ni détaillés ni publiés.

I Interprétation géométrique de la fonction de Schläfli

Lorsque le rédacteur en chef de cette revue me demanda de donner une interprétation plus géométrique à la fonction de Schläfli pour coiffer le calcul des intégrales de Coxeter, discipliné mais inconscient, j'acquiesçai !

Tout d'abord, je me suis rapidement rendu compte en lisant Schläfli que toute interprétation reposait sur le mot « orthoscheme ». J'ai donc parcouru 1 590 pages de littérature dont 252 plus spécifiquement consacrées à ce sujet.

D'autre part, en lisant ces articles ou ceux que l'on trouve sur le net, on réalise que la notion d'orthoscheme est au carrefour de grandes théories (physiques, mathématiques), ou de disciplines ou théorèmes célèbres. Jugez plutôt : « topologie des réseaux, groupes discrets, théorème de Gauss-Bonnet, théorème de Pappus, théorie de Cayley, théorème de Witt, intégrales multiples, théorème de Fubini, relation d'Euler-Poincaré, déterminant de Gram, théorème de Wythoff, inégalité d'Alexandrof, triangulation de Delaunay, théorie des cristaux, rigidité (degrés de liberté, théorie de Cauchy sur les automates), perturbations, variétés d'Einstein, modèle de Skyrme (pion, nucléon, méson, baryon, gluon, quark), plasma… ».

En lisant Coxeter et Schläfli, on n'est pas *underground*, ni même au raz des paquerettes, mais en plein ciel, à très haute altitude, en compagnie des albatros que leurs « ailes de géant empêchent de marcher » !

Il n'est absolument pas question, vu l'épaisseur des articles déja consacrés au sujet, de reprendre en détail les calculs qui sont longs et très techniques[3]. Je vais essayer de faire une synthèse, forcément très approximative, des notions géométriques sous-jacentes au calcul des intégrales de Coxeter.

Qu'est-ce qu'un orthoscheme ? C'est un simplexe bi-orthogonal[4]. Imaginez un tétraèdre bi-orthogonal, les autres angles dièdres étant de mesures respectives α, β et γ. Mais, comme nous ne sommes pas obligatoirement dans un espace euclidien, les cotés sont des géodésiques (lignes de plus court chemin), c'est-à-dire des grands cercles en théorie riemannienne de Schläfli ou des hyperpoles en théorie hyperbolique de Lobatchevsky. Imaginez maintenant un tel tétraèdre sur une sphère dans un espace de dimension 4 et pourquoi pas de dimension n…

Pourquoi l'orthoscheme est-il fondamental en théorie des réseaux ? Tout simplement parce que c'est le générateur du groupe cristallographique étudié dans les réseaux discrets. De plus, le groupe fini cristallographique contient un nombre fini d'orthoschemes, et les orthoschemes de la décomposition sont tous isométriques à l'un d'entre eux ! Ce qu'il y a en plus de très joli dans cette théorie, c'est que le nombre d'orthoschemes de la décomposition se calcule exactement, soit par l'intervention des groupes discrets, soit en faisant le rapport de la mesure de l'ensemble total (son volume, qui peut se calculer au moyen d'intégrales multiples) à la mesure de l'orthoscheme générateur. Ces calculs et ces justifications pourraient faire l'objet d'un prochain article de la part d'un spécialiste de la théorie des groupes. Par exemple, Coxeter a démontré que le cardinal G d'un groupe engendré par les orthoschemes d'angles $\alpha = \frac{\pi}{p}, \beta = \frac{\pi}{q}$ et $\gamma = \frac{\pi}{r}$ est donné par

$$G = \frac{64h}{12 - p - 2q - r + \frac{4}{p} + \frac{4}{r}}$$

où h, qui dépend de p, q, r (entiers positifs stricts), est

$$\frac{\pi}{\arccos(\sqrt{X})}$$

avec

$$2X = \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right) + \left(\cos^4\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{r}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

[3] Le lecteur intéressé peut me contacter.

[4] La $n-2$ orthogonalité des faces dans le simplexe en dimension n (pour $n = 4$, $n-2 = 2$, d'où la bi-othogonalité évoquée ici) est importante, car le déterminant de Gram associé, déterminant qui permet de calculer le volume, est tri-diagonal, ce qui en rend (en principe) le calcul plus facile.

$$G(p,q,r) = \frac{64\pi}{\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)+\sqrt{\cos^4\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{q}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{r}\right)-2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}\right)}{12-p-2q-r+\frac{4}{p}+\frac{4}{r}}$$

ce qui donne la très belle et simple formule (à retenir par cœur !) située en en haut de la page 24.

Cela se vérifie très bien avec Maple. Par exemple $G(5,3,3) = 14\,400$ (un simplexe sphérique en dimension 4 décomposé en 14 400 orthoschèmes isométriques !), $G(4,3,3) = 384$ ou $G(3,3,3) = 120$.

Il y a beaucoup de choses à creuser et expliquer avec de belles figures de réseaux et de cristaux et de vrais groupes[5] !

Schläfli, vers 1850, voulut ensuite calculer le volume d'un simplexe Δ et partant, d'un orthoscheme. Pour cela, en faisant varier les paramètres (les angles dièdres), il établit la différentielle de ce volume par la formule

$$\mathrm{d}V_n(\Delta) = \frac{\varepsilon}{n-1}\sum_F V_{n-2}(F)\mathrm{d}\alpha_F$$

où $\varepsilon = \pm 1$ suivant la courbure positive ou négative de l'espace, la somme étant prise sur toutes les faces F de codimension 2, et α_F désignant l'angle dièdre de la face F.

La démonstration extrêmement technique de ce résultat utilise la racine carrée du déterminant de Gram associé au simplexe, la fonction Γ et le théorème de Fubini de permutation des intégrations.

Cette belle formule resta admirée telle quelle jusqu'à ce que Coxeter, en 1935, réussisse à en trouver une solution sous forme de série trigonométrique convergente pour $n = 4$. Cette solution, la fonction S de Schläfli, est définie par la formule (6), pas évidente vous en conviendrez, de la section II.

En fait, le volume de l'orthoscheme en dimension 4 est

$$V = \frac{1}{4}S(\frac{\pi}{2}-\alpha,\beta,\frac{\pi}{2}-\gamma).$$

Pour mieux comprendre les tableaux récapitulatifs qui vont suivre, il faut signaler que S est liée à l'autre fonction f de Schläfli, celle qui représente un volume normalisé (tous les angles sont égaux à $\frac{\pi}{2}$) par la formule

$$S(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\pi^2}{2}f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,\beta,\frac{\pi}{2}-\gamma\right).$$

[5] Voir par exemple [9, vol. 2, p. 165] et, par Coxeter lui-même, [3, p. 565].

II Lien entre la fonction de Schläfli et l'intégrale de Baker

Ludwig Schläfli (1814-1895) est un mathématicien suisse[6] extraordinaire[7]. Il se tourna vers les sciences après des études de théologie, devint professeur de mathématiques dans une école de Thoune et poursuivit seul son instruction.

Outre de grandes capacités en botanique descriptive, il était vraiment multilingue puisqu'il pratiquait l'allemand, le français, l'italien, l'anglais, l'espagnol, le portuguais, le suèdois, le danois, le russe, le finois, les langues baltes, le latin, le grec, les langues sémitiques, le sanscrit, le rigveda et le perse ! ll était d'ailleurs particulièrement expert en sanscrit, une langue indo-aryenne ancienne, et en rigveda, un dialecte himalayen religieux ancien (1 500 ans avant J.C.).

C'est justement en raison de ses compétences linguistiques que le mathématicien Jacob Steiner, se rendant à Rome en 1843 avec Jacobi, Dirichlet et Borchardt, le choisit comme interprète. Dirichlet lui donne alors des leçons quotidiennes et, à partir de 1848, Schläfli enseigne les mathématiques à l'université de Berne. Ses travaux portent sur une étude très poussée des fonctions sphériques[8]. C'est lui qui démontra qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers convexes en dimension 3. Mais pourquoi se limiter à notre espace ? Il démontra qu'il n'y en a que six en dimension 4, et trois en dimension supérieure ou égale à 5. Un site internet[9] propose même de les animer en java.

Il travailla en géométrie, arithmétique et théorie des fonctions, et donna une représentation intégrale des fonctions de Bessel et Gamma. Il étudia également les fonctions elliptiques et contribua notablement à la géométrie non euclidienne sphérique.

[6] Il y a environ vingt-huit mathématiciens suisses répertoriés. Les plus connus sont les Bernoulli, Cramer, de Rham, Euler, Guldin, Schläfli, Steiner et Sturm.

[7] On pourra par exemple consulter [7] et le site `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Schlafli.html`.

[8] Cet article est limité à la dimension 4 mais les travaux de Schläfli portent sur des espaces de dimension quelconque. Cela en 1850... alors qu'il ne disposait pas des outils mathématiques de maintenant !

[9] Voir les rubriques 10 et 16 de la page `www.geometry.net/scientists/schlafli_ludwig.php`.

Il apporta des contributions fondamentales en théorie de l'élimination, des formes quadratiques, et en mécanique céleste. C'était vraiment un savant universel !

Il reçut, le 31 octobre 1870, le prix Steiner de l'Académie royale de Berlin pour sa découverte, avant Juel, de l'existence d'un maximum de 27 droites sur une surface cubique non réglée (la figure qu'elles forment s'appelle l'eikosiheptagramme), et du « double six » sur une telle surface[10].

Nous connaissons tous le principe de Dirichlet-Schläfli : c'est le principe des tiroirs ou des trous de pigeons : Si n objets (ou pigeons) sont distribués dans m tiroirs (ou nids) avec $n > m$, alors il existe un tiroir (un nid) contenant au moins deux objets (ou pigeons). Ce principe est utilisé dans la démonstration d'un grand nombre de théorèmes, par exemple celui de Gelfond-Schneider qui mériterait un article dans cette revue et permet d'expliquer pourquoi $e^{\pi\sqrt{163}}$ est proche d'un entier mais n'en est pas un.

La majorité des travaux de Schläfli furent publiés en 1901 après sa mort.

Formules « points de départ » du calcul

Établissons des formules qui nous seront utiles pour des valeurs particulières de la fonction de Schläfli.

• Pour $0 < |y| < 1$, on a

$$\frac{1}{y}\frac{1}{1-ye^{2ix}} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n-1}e^{2inx}$$

et, puisque la série du second membre est absolument donc commutativement convergente, on peut séparer partie réelle et partie imaginaire, d'où

$$\frac{1}{y}\frac{1-y\cos(2x)}{1+y^2-2y\cos(2x)} - \frac{1}{y}\frac{\cos(2x)-y}{1+y^2-2y\cos(2x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n-1}\cos(2nx)$$

et

$$\frac{\sin(2x)}{1+y^2-2y\cos(2x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n-1}\sin(2nx).$$

[10] Traduction imagée : il est possible de colorier six droites en blanc et les autres en noir de façon à ce que toute droite blanche ne rencontre que des droites noires (au nombre de 5) et réciproquement. Le site `http://www.jackstrawsstudios.com/Archives/superam/Archives/schlafli/schlafli.html` expose un montage mobile (« Schlafli est vivant et bien vivant dans le studio d'Hollywood »), qui inspire à l'auteur une « lueur de transcendance », analogue à l'émerveillement ressenti devant le style du « secret de la vie » de Salvador Dali !

On constate que ces formules sont encore vraies pour $y = 0$.

Puisque, pour $|y| \le r < 1$ (r donné > 0), les deux séries des seconds membres sont normalement, donc uniformément, convergentes par rapport à y, on peut les intégrer terme à terme. D'où

$$\int_0^y \frac{\cos(2x)-t}{1+t^2-2t\cos(2x)}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2-2y\cos(2x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n}\cos(2nx) \qquad (1)$$

et

$$\int_0^y \frac{\sin(2x)}{1+t^2-2t\cos(2x)}\mathrm{d}t = \arctan\left(\frac{1+y}{1-y}\tan(x)\right) - x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n}\sin(2nx) \qquad (2)$$

pourvu que l'on convienne de prendre la détermination de l'arctan qui est dans $[0, \pi]$.

• Grâce à Abel, si $0 < x < \pi$, ces formules sont encore vraies par prolongement par continuité des deux membres lorsque $y \to 1 - 0$ et $y \to -1 + 0$ et même pour $y = -1$ et $x = 0$ ou π.

Ainsi,

$$-\ln(2\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos(2nx) \qquad (3)$$

et

$$\frac{\pi}{2} - x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2nx)}{n}. \qquad (4)$$

Ces dernières formules auraient d'ailleurs pu s'obtenir en utilisant une détermination continue de $\log(1-z)$ mais j'ai voulu rester dans le cadre strictement élémentaire du programme de *Spéciales*.

• La convergence normale, donc uniforme, grâce à Abel, de la dernière série pour $x \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, ε donné > 0, justifie une intégration des deux membres (pour $y = 1$) par rapport à x, d'où

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{2n^2} + \frac{1}{2}\zeta(2)$$

où $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$.

À ce stade, il faut peut-être rappeler que l'on obtient facilement $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ en cherchant le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $|x| \le \pi$ qui donne

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

et en y faisant $x = \pi$.

Au final, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = x - \pi x + \frac{\pi^2}{6} = (\frac{\pi}{2} - x)^2 - \frac{\pi^2}{12}, \quad (5)$$

cette formule étant encore valable pour $x = 0$ et $x = \pi$ grâce à la valeur connue de $\zeta(2)$.

Valeurs particulières et expression intégrale de la fonction de Schläfli

On définit la fonction S de Schläfli par la formule :

$$S(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-X)^n}{n^2} (\cos(2n\alpha) - \cos(2n\beta) + \cos(2n\gamma) - 1) - \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \quad (6)$$

où

$$X = \frac{\sin(\alpha)\sin(\gamma) - D}{\sin(\alpha)\sin(\gamma) + D}$$

et

$$D = \sqrt{\cos^2(\alpha)\cos^2(\gamma) - \cos^2(\beta)}.$$

Quand D est complexe (cas de Lobatchevsky), D a le même argument (modulo 2π) que $i\cos(\beta)$ et nous supposons que $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$.

On remarque d'abord que $S(\gamma,\beta,\alpha) = S(\alpha,\beta,\gamma)$.

Dans le cas où $\alpha = 0$, alors $X = -1$ et

$$S(0,\beta,\gamma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(-\cos(2n\beta) + \cos(2n\gamma)) + \beta^2 - \gamma^2$$

qui, grâce à la formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = x - \pi x + \frac{\pi^2}{6} = (\frac{\pi}{2} - x)^2 - \frac{\pi^2}{12},$$

donne

$$S(0,\beta,\gamma) = -\beta^2 + \pi\beta + \gamma^2 - \pi\gamma + \beta^2 - \gamma^2,$$

d'où :

$$S(0,\beta,\gamma) = \pi(\beta - \gamma).$$

Dans le cas où $\sin^2\alpha + \sin^2\gamma = \sin^2\beta$, alors

$$D^2 = \sin^2\beta - \sin^2\alpha - \sin^2\gamma + \sin^2\alpha\sin^2\gamma,$$

donc $D = \sin\alpha\sin\gamma$ et $X = 0$, d'où :

$$S(\alpha,\beta,\gamma) = -\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2.$$

Dans le cas où $\cos\alpha\cos\gamma = \cos\beta$ (ce qui impose $\beta \le \frac{\pi}{2}$), alors $D = 0$ et $X = 1$, et la formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = x - \pi x + \frac{\pi^2}{6} = (\frac{\pi}{2} - x)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

spécialisée avec $\frac{\pi}{2} - x = \alpha, \beta, \gamma, 0$ successivement donne

$$S(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2.$$

Dans ce cas, on obtient donc :

$$S(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

En particulier, $S(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}) = 0$.

Toujours dans le but d'obtenir des valeurs particulières de la fonction S, limitons-nous maintenant au cas où D est réel (cas riemannien de Schläfli) c'est-à-dire $\cos^2\alpha\cos^2\gamma \ge \cos^2\beta$. Tant que $|X| \le r < 1$ (r donné), ce qui assure l'uniforme convergence de la série dérivée et permet ainsi de dériver terme à terme, on a :

$$\mathrm{d}S(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-X)^n}{n}(\cos(2n\alpha) - 2\cos(2n\beta) + \cos(2n\gamma) - 1)\mathrm{d}\ln(X) - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-X)^n}{n}(\sin(2n\alpha)\mathrm{d}\alpha - \sin(2n\beta)\mathrm{d}\beta + \sin(2n\gamma)\mathrm{d}\gamma) - 2(\alpha\mathrm{d}\alpha - \beta\mathrm{d}\beta + \gamma\mathrm{d}\gamma).$$

On montre que le coefficient de $\mathrm{d}\ln X$ est nul. Posant $y = -X$ dans la formule

$$-\frac{1}{2}\ln(1 + y^2 - 2y\cos(2x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n}\cos(2nx),$$

et tenant compte de ce que

$$\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u,$$
$$1 = \cos^2 u + \sin^2 u,$$

$$1 + X = 1 + \frac{\sin(\alpha)\sin(\gamma) - D}{\sin(\alpha)\sin(\gamma) + D},$$
$$= \frac{2\sin(\alpha)\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\gamma) + D},$$

$$1 - X = 1 - \frac{\sin(\alpha)\sin(\gamma) - D}{\sin(\alpha)\sin(\gamma) + D},$$
$$= \frac{2D}{\sin(\alpha)\sin(\gamma) + D},$$

$$\frac{(-X)^n}{n}(\cos(2n\alpha)-\cos(2n\beta)+\cos(2n\gamma)-1)=$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{[(1+X)^2\cos^2\alpha+(1-X)^2\sin^2\alpha][(1+X)^2\cos^2\gamma+(1-X)^2\sin^2\gamma]}{[(1+X)^2\cos^2\beta+(1-X)^2\sin^2\beta](1+X)^2}\right)=$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{[\sin^2\gamma\cos^2\alpha+D^2][\sin^2\alpha\cos^2\gamma+D^2]}{[\sin^2\alpha\sin^2\gamma\cos^2\beta+D^2\sin^2\beta]}\right)-\frac{1}{2}\ln(1)=0.$$

---

on obtient l'équation située en haut de la page 27.

Il reste donc, d'après la formule

$$\arctan\left(\frac{1+y}{1-y}\tan(x)\right)-x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n}\sin(2nx),$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}S(\alpha,\beta,\gamma)=\arctan\left(\frac{1-X}{1+X}\tan(\alpha)\right)\mathrm{d}\alpha$$
$$-\arctan\left(\frac{1-X}{1+X}\tan(\beta)\right)\mathrm{d}\beta$$
$$+\arctan\left(\frac{1-X}{1+X}\tan(\gamma)\right)\mathrm{d}\gamma,$$

soit :

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}S(\alpha,\beta,\gamma)=\arctan\left(\frac{D}{\cos\alpha\sin\gamma}\right)\mathrm{d}\alpha$$
$$-\arctan\left(\frac{D\tan\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}\right)\mathrm{d}\beta$$
$$+\arctan\left(\frac{D}{\sin\alpha\cos\gamma}\right)\mathrm{d}\gamma. \quad (7)$$

Comme $\cos^2 u=\frac{1}{1+\tan^2 u}$, on en déduit :

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}S(\alpha,\beta,\gamma)=\arccos\left(\frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}\right)\mathrm{d}\alpha$$
$$-\arccos\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2\gamma}}\right)\mathrm{d}\beta$$
$$+\arccos\left(\frac{\cos\gamma\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\gamma-\cos^2\beta}}\right)\mathrm{d}\gamma. \quad (8)$$

Nous allons maintenant montrer la formule

$$S(\alpha,\frac{\pi}{2},\gamma)=2(\frac{\pi}{2}-\alpha)(\frac{\pi}{2}-\gamma).$$

Cette formule est vraie pour $\gamma=\frac{\pi}{2}$ puisque si $\sin^2\alpha+\sin^2\gamma=\sin^2\beta$ nous avons vu que $S(\alpha,\beta,\gamma)=-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$. Il suffit de vérifier que les différentielles des deux membres sont égales, ce qui est exact car

$$\mathrm{d}2(\frac{\pi}{2}-\alpha)(\frac{\pi}{2}-\gamma)=-2(\frac{\pi}{2}-\gamma)\mathrm{d}\alpha-2(\frac{\pi}{2}-\alpha)\mathrm{d}\gamma$$

et, d'après (8) :

$$\frac{1}{2}dS(\alpha,\frac{\pi}{2},\gamma)=(\frac{\pi}{2}-\gamma)d\alpha+(\frac{\pi}{2}-\alpha)d\gamma.$$

On peut en déduire une identité intéréssante : Dans la définition de $S(\alpha,\beta,\gamma)$, affectons la valeur $\frac{\pi}{2}$ à β. On a, après réduction,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^n(\alpha+\gamma)}{\cos^n(\alpha-\gamma)}\frac{1}{n^2}(\cos(2n\alpha)-\cos(n\pi)+\cos(2n\gamma)-1)$$
$$=(\frac{\pi}{2}-\alpha-\gamma)^2 \quad (9)$$

pour $0\le\alpha,\gamma\le\frac{\pi}{2}$, ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^n(x)}{\cos^n(y)}\frac{1}{n^2}(\cos(nx)\cos(ny)-\cos^2(\frac{n\pi}{2}))$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-x)^2$$

avec $0\le x\le\pi$ et $\cos^2 x\le\cos^2 y$.

Nous allons maintenant montrer les formules

$$S(2\alpha-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{6})=4S(\alpha,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$$

pour $\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, et

$$S(\alpha,\pi-2\alpha,\alpha)=6S(\alpha,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$$

pour $0\le\alpha\le\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ (pour la réalité de η défini plus bas).

Grâce aux relations $S(0,\beta,\gamma)=\pi(\beta-\gamma)$ et, pour $\sin^2\alpha+\sin^2\gamma=\sin^2\beta$, $S(\alpha,\beta,\gamma)=-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$ et enfin $S(\alpha,\frac{\pi}{2},\gamma)=2(\frac{\pi}{2}-\alpha)(\frac{\pi}{2}-\gamma)$, les relations demandées sont satisfaites pour $\alpha=\frac{\pi}{4}\cdot$ Pour les démontrer, il suffit donc de vérifier que les deux membres ont la même différentielle ce qui est immédiat d'après (8). En effet, si l'on pose

$$\eta=\arccos\Big(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\cos^2\alpha-1}}\Big),$$

cette relation donne

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}S(2\alpha-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{3}) = \eta\mathrm{d}(2\alpha-\frac{\pi}{2})-2\eta\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=4\eta\mathrm{d}\alpha,$$

puis

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}S(\alpha,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\eta\mathrm{d}\alpha,$$

et enfin :

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}S(\alpha,\pi-2\alpha,\alpha)=\eta\mathrm{d}\alpha-2\eta\mathrm{d}(\pi-2\alpha)+\eta\mathrm{d}\alpha=6\eta\mathrm{d}\alpha.$$

Comme l'expression de X dans celle de S n'est pas modifiée quand on remplace β par $\pi-\beta$, on a

$$S(\alpha,\pi-\beta,\gamma)-S(\alpha,\beta,\gamma)=(\pi-\beta)^2-\beta^2==\pi(\pi-2\beta)$$

et, en particulier,

$$S(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6})-S(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=\frac{\pi^2}{3}.$$

Grâce à la relation

$$S(\alpha,\pi-2\alpha,\alpha)=6S(\alpha,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}),$$

on a :

$$S(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6})=6S(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}).$$

On en déduit que :

$$S(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=\frac{\pi^2}{15}.$$

En appliquant cinq fois la relation qui veut que $S(\alpha,\beta,\gamma)=-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$ si $\sin^2\alpha+\sin^2\gamma=\sin^2\beta$, on obtient :

$$\begin{aligned}
S(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}) &= \frac{\pi^2}{48},\\
S(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}) &= \frac{\pi^2}{144},\\
S(\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{10}) &= \frac{\pi^2}{90},\\
S(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{6}) &= \frac{\pi^2}{450},\\
S(\frac{3\pi}{10},\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{6}) &= \frac{19\pi^2}{450}.
\end{aligned}$$

En utilisant

$$S(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{6})=\frac{\pi^2}{450}$$

et la relation

$$S(2\alpha-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{6})=4S(\alpha,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}),$$

spécialisée avec $\alpha=\frac{3\pi}{10}$, on a :

$$S(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=\frac{\pi^2}{1\,800}.$$

Enfin, grâce à

$$S(\alpha,\pi-2\alpha,\alpha)=6S(\alpha,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}),$$

on a :

$$S(\frac{3\pi}{10},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{10})=\frac{\pi^2}{300}.$$

Explicitant ces deux derniers résultats, grâce à l'expression de $S(\alpha,\beta,\gamma)$ et constatant qu'alors $D=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ et $X=\frac{\sqrt{5}+1-8D}{\sqrt{5}+1+8D}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sigma$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\sigma)^n}{n^2}\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-1\right)=\frac{13\pi^2}{1{,}800}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\sigma)^n}{n^2}\left(2\cos\left(\frac{3n\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-1\right)=\frac{7\pi^2}{300}$$

Comme $\cos(n\pi)=(-1)^n$, on a encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sigma)^n}{n^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-\cos(n\pi)\right)=\frac{13\pi^2}{1\,800}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sigma)^n}{n^2}\left(2\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)-\cos(n\pi)\right)=\frac{7\pi^2}{300}.$$

Particularisant (9) avec $\alpha=\frac{\pi}{5}$ et $\gamma=\frac{\pi}{10}$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sigma)^n}{n^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)-1-\cos(n\pi)\right)=\frac{\pi^2}{25}$$

et, en lui retranchant chacune des relations précédentes,

$$S(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=\frac{191\pi^2}{1\,800}$$

et

$$S(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{10})=\frac{11\pi^2}{300}$$

puisque dans ces deux cas on constate (en utilisant Derive, par exemple) que $X=-\sigma$.

L'utilisation de

$$\alpha=\arctan\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}$$

Tableau I. Tableau de synthèse des valeurs particulières obtenues. La dernière colonne, avec le lien entre S et f, permet de contrôler les spécialisations de f données par Coxeter [4, pp. 12-13] et Schläfli [9, vol. 1, pp. 267, 269 et vol. 2, pp. 180-182, 258, 261]. La fonction f de Wankel donnée dans le second volume de Schläfli [9, vol. 2, pp. 156-162], n'est pas à confondre, bien que la même lettre soit employée dans le livre, avec la fonction f de Schläfli. Manifestement $f_{\text{Wankel}} = \frac{1}{4} f_{\text{Schlafli}}$.

Condition	$S($	α	,	β	,	γ	$) =$	$S(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{\pi}{2}-\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}-\gamma)$
Échange de α et γ	$S($	γ	,	β	,	α	$) =$	$S(\alpha,\beta,\gamma)$
	$S($	0	,	β	,	γ	$) =$	$\pi(\beta-\gamma)$
$\sin^2\alpha + \sin^2\gamma = \sin^2\beta$	$S($	α	,	β	,	γ	$) =$	$-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$
$\cos\alpha\cos\gamma = \cos\beta$ alias $D = 0$	$S($	α	,	β	,	γ	$) =$	0
Exemple du cas précédent	$S($	$\frac{\pi}{4}$	,	$\frac{\pi}{3}$	,	$\frac{\pi}{4}$	$) =$	0
	$S($	α	,	$\frac{\pi}{2}$	,	γ	$) =$	$2(\frac{\pi}{2}-\alpha)(\frac{\pi}{2}-\gamma)$
	$S($	$2\alpha-\frac{\pi}{2}$	,	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	,	$\frac{\pi}{6}$	$) =$	$4S(\alpha,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$
	$S($	α	,	$\pi-2\alpha$	,	α	$) =$	$6S(\alpha,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$
[10, p. 67]	$S($	α	,	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	,	$\frac{\pi}{4}$	$) =$	$3S(\alpha,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6})$
	$S($	$\frac{\pi}{6}$	,	$\frac{\pi}{3}$	,	$\frac{\pi}{6}$	$) =$	$\frac{\pi^2}{15} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$
	$S($	$\frac{\pi}{4}$	,	$\frac{\pi}{3}$	,	$\frac{\pi}{6}$	$) =$	$\frac{\pi^2}{48} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$
	$S($	$\frac{\pi}{6}$	,	$\frac{\pi}{4}$	,	$\frac{\pi}{6}$	$) =$	$\frac{\pi^2}{144} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$
	$S($	$\frac{3\pi}{10}$	,	$\frac{\pi}{3}$	,	$\frac{\pi}{10}$	$) =$	$\frac{\pi^2}{90} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{5})$
	$S($	$\frac{\pi}{10}$	,	$\frac{\pi}{5}$	,	$\frac{\pi}{6}$	$) =$	$\frac{\pi^2}{450} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3})$
	$S($	$\frac{3\pi}{10}$	,	$\frac{2\pi}{5}$	,	$\frac{\pi}{6}$	$) =$	$\frac{19\pi^2}{450} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{3})$
	$S($	$\frac{3\pi}{10}$	,	$\frac{\pi}{3}$	,	$\frac{\pi}{6}$	$) =$	$\frac{\pi^2}{1800} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$
	$S($	$\frac{3\pi}{10}$	,	$\frac{2\pi}{5}$	,	$\frac{3\pi}{10}$	$) =$	$\frac{\pi^2}{300} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{5})$
	$S($	$\frac{\pi}{10}$	,	$\frac{\pi}{3}$	,	$\frac{\pi}{6}$	$) =$	$\frac{191\pi^2}{1800} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$
	$S($	$\frac{\pi}{10}$	,	$\frac{\pi}{5}$	,	$\frac{\pi}{10}$	$) =$	$\frac{11\pi^2}{300} = \frac{\pi^2}{2} f(\frac{2\pi}{5},\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5})$

où

$$t = b - (a-b)\tan^2\alpha$$

dans l'intégrale

$$\sqrt{a-b}\int_0^x \frac{\arctan\sqrt{t}}{(a-b)\sqrt{b-t}}\mathrm{d}t$$

donne

$$\sqrt{a-b}\int_0^x \frac{\arctan\sqrt{t}}{(a-b)\sqrt{b-t}}\mathrm{d}t = -2\int_0^x \arctan\sqrt{t}\,\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}\right)$$

car

$$2\mathrm{d}\alpha = \frac{-(a-b)\mathrm{d}t}{(a-t)\sqrt{b-t}}.$$

En fixant β et γ dans (7), on a :

$$S(A,\beta,\gamma) = -2\int_0^A \arctan\frac{D}{\cos\alpha\sin\gamma}\mathrm{d}\alpha.$$

Une simple identification formelle donne alors

$$\sqrt{t} = \frac{D}{\cos\alpha\sin\gamma}\mathrm{d}\alpha,$$

$$t = \frac{D^2}{\cos^2\alpha\sin^2\gamma}.$$

Or

$$\tan^2\alpha = \frac{b-t}{a-b},$$

donc

$$\cos^2\alpha = \frac{a-b}{a-t},$$

$$D^2 = \cos^2\alpha\cos^2\gamma - \cos^2\beta$$

et

$$t = \frac{D^2}{\cos^2\alpha\sin^2\gamma} = \frac{(a-b)\cos^2\gamma - (a-t)\cos^2\beta}{(a-b)\sin^2\gamma}.$$

Puisque nous considérons β et γ comme des constantes, une simple identification de ces polynômes en t montre d'une part que le coefficient constant doit être nul, soit

$$(a-b)cos^2\gamma - a\cos^2\beta = 0,$$

et d'autre part que le coefficient de t doit être égal à 1, soit

$$\cos^2\beta = (a-b)\sin^2\gamma.$$

Le rapport donne $\tan^2\gamma = \frac{1}{a}$ puis

$$\tan^2\beta + 1 = \frac{a}{a-b}(1+\tan^2\gamma) = \frac{a+1}{a-b},$$

soit

$$\tan^2\beta = \frac{a+1-a+b}{a-b} = \frac{b+1}{a-b}.$$

Tout cela nous permet d'obtenir l'appréciable lien entre l'intégrale de Baker et la fonction S de Schläfli :

$$\begin{aligned}\sqrt{a-b}\int_0^x \frac{\arctan\sqrt{t}}{(a-b)\sqrt{b-t}}\mathrm{d}t \\ = -2\int_0^x \arctan\sqrt{t}\,\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}\right) \\ = S\left(\arctan\sqrt{\frac{b-x}{a-b}}, \arctan\sqrt{\frac{b+1}{a-b}}, \arctan\sqrt{\frac{1}{a}}\right)\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}-2\int_0^x \arctan\sqrt{t}\,\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}\right) = \\ S\left(\arctan\sqrt{\frac{b-x}{a-b}}, \arctan\sqrt{\frac{b+1}{a-b}}, \arctan\sqrt{\frac{1}{a}}\right)\end{aligned}$$

avec $x \leq b < a$.

III Justification des intégrales de Coxeter

Calcul de l'intégrale A

En spécialisant la relation précédente avec $a = 3$ et $b = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}-2\int_0^x \arctan\sqrt{t}\,\mathrm{d}\left(\arctan(\sqrt{2-t})\right) = \\ S\left(\arctan\sqrt{2-x}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Effectuons alors le changement de variable $\theta = 2\arctan\sqrt{2-t}$, soit

$$\begin{aligned}2 - t &= \tan^2\frac{\theta}{2}, \\ t &= 2 - \tan^2\frac{\theta}{2} \\ &= 3 - 1 - \tan^2\frac{\theta}{2} \\ &= 3 - \frac{2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 3 - \frac{2}{1+\cos\theta} \\ &= \frac{1+3\cos\theta}{1+\cos\theta} \\ &= \frac{1+3\cos\theta}{1+\cos\theta}.\end{aligned}$$

Nous n'oublions pas de changer les bornes : $t = 0$ donne $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ et, posant $\theta_0 = \pi - \arctan\frac{1}{3}$ et $\theta_x = \arctan\sqrt{2-x}$, on obtient ainsi :

$$S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -\int_{\theta_0}^{\theta_x} \arctan\sqrt{\frac{1+3\cos\theta}{1+\cos\theta}}\mathrm{d}\theta.$$

Multiplions les deux membres par 2 :

$$2S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -2\int_{\theta_0}^{\theta_x} \arctan\sqrt{\frac{1+3\cos\theta}{1+\cos\theta}}\mathrm{d}\theta.$$

Posons $2u = \arctan\sqrt{\frac{1+3\cos\theta}{1+\cos\theta}}$.

Comme

$$\begin{aligned}\cos(2u) &= \frac{1-\tan^2 u}{1+\tan^2 u} \\ &= \frac{1-\frac{1+3\cos\theta}{1+\cos\theta}}{1+\frac{1+3\cos\theta}{1+\cos\theta}} \\ &= \frac{1+\cos\theta-3\cos\theta-1}{1+\cos\theta+1+3\cos\theta} \\ &= \frac{-2\cos\theta}{2+4\cos\theta} \\ &= \frac{-\cos\theta}{1+2\cos\theta},\end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$2S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -\int_{\theta_0}^{\theta_x}\left(\pi - \arctan\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta.$$

En faisant $\theta_x = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}2S\left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi^2}{3} \\ &= -\int_{\theta_0}^{0}\left(\pi - \arctan\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

De même, avec $\theta_x = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}2S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi^2}{24} \\ &= -\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\pi - \arctan\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

La relation de Chasles, quant à elle, donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta_x}\left(\pi - \arctan\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\theta_0} + \int_{\theta_0}^{\theta_x} \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 2S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right),\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta_x}\left(\pi - \arctan\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \\ \pi\theta_x - \frac{\pi^2}{3} + 2S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Tableau II.

θ_x	$S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$	$\pi\theta_x - \frac{\pi^2}{3}$	$2S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$	$\int_0^{\theta_x}\left(\arctan\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{15}$	0	$\frac{2\pi^2}{15}$	$\frac{2\pi^2}{15}$ (* * * * *)
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{48}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{24}$	$\frac{5\pi^2}{24} = A$
$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{\pi^2}{1\,800}$	$\frac{4\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^2}{900}(900 = 15 * 60)$	$\frac{241\pi^2}{900}$
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{191\pi^2}{1\,800}$	$\frac{-2\pi^2}{15}$	$\frac{191\pi^2}{900}$	$\frac{71\pi^2}{900}$
θ_0	0	$\pi\theta_0 - \frac{\pi^2}{3}$	0	$\pi\theta_0 - \frac{\pi^2}{3}$ $\left(\theta_0 = \pi - \arccos\frac{1}{3}\right)$
2φ	0	$2\pi\varphi - \frac{\pi^2}{3}$	0	$2\pi\varphi - \frac{\pi^2}{3}$ $\left(\begin{array}{c}\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ car si } \cos\alpha\cos\gamma = \cos\beta \\ \text{alors } S(\alpha,\beta,\gamma) = 0\end{array}\right)$

Les nombreuses spécialisations donnent des valeurs d'intégrales (voir le tableau II). Ainsi, $\theta_x = \frac{\pi}{2}$ donne $2S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{24}$, soit :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\arctan\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{24} \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \frac{7\pi^2}{24} \\ &= \frac{5\pi^2}{24}\cdot \end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale B

Reprenons la formule obtenue à la fin de la section II :

$$-2\int_0^x \arctan\sqrt{t}\,\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}\right) = S\left(\arctan\sqrt{\frac{b-x}{a-b}}, \arctan\sqrt{\frac{b+1}{a-b}}, \arctan\sqrt{\frac{1}{a}}\right).$$

Nous cherchons le bon changement de variable à effectuer et les bonnes valeurs à attribuer aux constantes a et b pour trouver l'intégrale B au moyen de l'intégrale de Baker.

Nous voulons que $\cos(2\arctan\sqrt{t}) = \frac{1-t}{1+t}$ soit égal à $\frac{1}{1+2\cos\theta}$, ce qui donne $1-t+2\cos\theta-2t\cos\theta-1-t = 0$, soit $t(-2-2\cos\theta) = -2\cos\theta$, ou $t = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{t}{1-t}\cdot$ On pose donc $\theta_x = \arccos\frac{x}{1-x}$, et $t = 0$ donne $\theta_0 = \frac{\pi}{2}\cdot$

Posant $\alpha = \arctan\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}$, nous voulons choisir a et b pour que α soit le plus simple possible en θ, par exemple proportionnel à θ, pour tomber sur une intégrale proportionnelle à B.

Or

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \sqrt{\frac{b-t}{a-b}}, \\ \tan^2\alpha &= \frac{b + b\cos\theta - \cos\theta}{(a-b)(1+\cos\theta} \\ &= \frac{(b-1)\cos\theta + b}{(a-b)(1+\cos\theta}\cdot \end{aligned}$$

L'idéal, compte tenu que $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, serait que $(b-1)\cos\theta + b$ soit proportionnel à $1-\cos\theta$ alias $b = -b+1$ ou $b = \frac{1}{2}\cdot$ Alors $\tan^2\alpha = \frac{1}{2(a-b)}\tan^2\frac{\theta}{2}\cdot$ Pour conclure, il suffit que $\frac{1}{2(a-b)} = 1$, c'est-à-dire que $a = 1$. Dans ce cas, $\alpha = \frac{\theta}{2}$, et, pour avoir $\theta_x = \frac{\pi}{3}$, il suffit de prendre $x = \frac{1}{3}$; et

$$-\int_{\theta_0}^{\theta_x}\arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = 2S\left(\arctan\sqrt{\frac{b-x}{a-b}}, \arctan\sqrt{\frac{b+1}{a-b}}, \arctan\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 2S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

En recourant alors à Chasles, on obtient :

$$\int_0^{\theta_x}\arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta_0}\arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta - 2S\left(\frac{\theta_x}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Mais $\theta_x = 0$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_0}\arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta &= 2S\left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\int_0^{\theta_x} \arccos\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = 2S\left(0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right) - 2S\left(\frac{\theta_x}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{6} - 2S\left(\frac{\theta_x}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right).$$

Et on a le tableau III.

Calcul de l'intégrale C

Reprenons la formule obtenue à la fin de la section II :

$$-2\int_0^x \arctan\sqrt{t}\,\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}\right) = S\left(\arctan\sqrt{\frac{b-x}{a-b}},\arctan\sqrt{\frac{b+1}{a-b}},\arctan\sqrt{\frac{1}{a}}\right).$$

Nous cherchons le bon changement de variable à effectuer et les bonnes valeurs à attribuer aux constantes a et b pour trouver l'intégrale C au moyen de l'intégrale de Baker.

Nous voulons que $\cos(2\arctan\sqrt{t}) = \frac{1-t}{1+t}$ soit égal à $\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}$, ce qui donne $2\cos\theta - 2t\cos\theta - 1 - t + \cos\theta + t\cos\theta = 0$, soit $t(1+\cos\theta) = 3\cos\theta - 1$, ou $t = \frac{3\cos\theta-1}{1+\cos\theta} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{t+1}{3-t}$. On pose donc $\theta_x = \arccos\frac{1+x}{3-x}$, et $t = 0$ donne $\theta_0 = \arccos\frac{1}{3}$.

Posant $\alpha = \arctan\sqrt{\frac{b-t}{a-b}}$, nous voulons choisir a et b pour que α soit le plus simple possible en θ, par exemple proportionnel à θ, pour tomber sur une intégrale proportionnelle à C.

Or

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{b-t}{a-b}},$$
$$\tan^2\alpha = \frac{b + b\cos\theta - 3\cos\theta + 1}{(a-b)(1+\cos\theta)} = \frac{(b-3)\cos\theta + b + 1}{(a-b)(1+\cos\theta)}.$$

L'idéal serait que $(b-3)\cos\theta + b + 1$ soit proportionnel à $1+\cos\theta$ alias $b-3 = b+1$ ou $2b = 2$, soit $b = 1$. Alors $\tan^2\alpha = \frac{2}{(a-b)}\tan^2\frac{\theta}{2}$. Pour conclure, il suffit que $\frac{2}{(a-b)} = 1$, c'est-à-dire que $a - b = 2$, soit $a = 3$. Dans ce cas, $\alpha = \frac{\theta}{2}$ et, pour avoir $\theta_x = \frac{\pi}{3}$, il suffit de prendre $x = \frac{1}{3}$ et

$$-\int_{\theta_0}^{\theta_x} \arccos\left(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = 2S\left(\arctan\sqrt{\frac{b-x}{a-b}},\arctan\sqrt{\frac{b+1}{a-b}},\arctan\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 2S\left(\frac{\theta_x}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right).$$

En recourant alors à Chasles, on obtient :

$$\int_0^{\theta_x} \arccos\left(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta_0} \arccos\left(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta - 2S\left(\frac{\theta_x}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right).$$

Mais $\theta_x = 0$ donne

$$\int_0^{\theta_0} \arccos\left(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = 2S\left(0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6},$$

et ainsi :

$$\int_0^{\theta_x} \arccos\left(\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = 2S\left(0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right) - 2S\left(\frac{\theta_x}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6} - 2S\left(\frac{\theta_x}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right).$$

Et on a le tableau IV.

Pour finir

Par une coïncidence, à peu près au moment de la première rédaction de cet article, Coxeter qui enseignait alors toujours à l'université de Toronto, demandait dans [1] de justifier le résultat suivant[11], constaté géométriquement, toujours en théorie riemannienne :

$$\int_0^6 \frac{\operatorname{arcsec}(t)\mathrm{d}t}{(t+2)\sqrt{(t+1)(t+3)}} + \int_0^6 \frac{\operatorname{arcsec}(t)\mathrm{d}t}{(t+2)\sqrt{(t+1)}} = \frac{2\pi^2}{15} \qquad (*****)$$

Avis donc aux amateurs éclairés et rappelons que $\sec(t) = \frac{1}{\cos t}$.

[11] Le (*****) est un clin d'œil en direction de la case de droite de la première ligne du tableau II.

Tableau III.

θ_x	$S\left(\alpha=\frac{\theta_x}{2},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$2S\left(\frac{\theta_x}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$	$\int_0^{\theta_x}\left(\arctan\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta$
$\frac{\pi}{3}$ (*)	$\frac{\pi^2}{48}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{24}$	$\frac{\pi^2}{8}=B$
$\frac{\pi}{2}$	0 car $\cos\alpha\cos\gamma=\cos\beta$	$\frac{\pi^2}{6}$	0	$\frac{\pi^2}{6}$

(*) car si $\sin^2\alpha+\sin^2\gamma=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=\sin^2\beta$ alors $S(\alpha,\beta,\gamma)=-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$.

Tableau IV.

θ_x	$S\left(\alpha=\frac{\theta_x}{2},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$2S\left(\frac{\theta_x}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$	$\int_0^{\theta_x}\left(\arctan\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta$
$\frac{\pi}{3}$ (*)	$\frac{\pi^2}{144}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{72}$	$\frac{11\pi^2}{72}=C$
2ν	0 car $\cos\alpha\cos\gamma=\cos\beta$	$\frac{\pi^2}{6}$	0	$\frac{\pi^2}{6}\left(\text{avec }\nu=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right)$

(*) car si $\sin^2\alpha+\sin^2\gamma=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=\sin^2\beta$ alors $S(\alpha,\beta,\gamma)=-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$.

Dans [6] , Richard K. Guy constate que l'intégrale de Coxeter

$$\frac{5}{2}\int_{\frac{1}{2}\cot^2\alpha}^{1}\frac{\arccos x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}\times\left[\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2x\sin^2\alpha-\cos 2\alpha}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x$$

n'est pas complètement explicitée. On pourra consulter [8] sur les systèmes de Coxeter.

Références

[1] H.S.M. Coxeter, *American Mathematical Monthly*, (1988), p. 330.

[2] H.S.M. Coxeter, *Mathematical Gazette*, **13** (1926), p. 205.

[3] H.S.M. Coxeter, *Math. Zeitschrift*, **188** (1985), pp. 559-591.

[4] H.S.M. Coxeter, *Math. Zeitschrift*, **200** (1988), pp. 11-21.

[5] H.S.M. Coxeter, *Twelve Geometric Essays*, Southern Illinois University Press, 1988.

[6] R.K. Guy, *American Mathematical Monthly*, (1997), p. 567.

[7] B. Hauchecorne, *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, 1996.

[8] L. Paris, *L'Enseignement mathématique* (janvier–juin 1992), pp. 95-102.

[9] L. Schläfli, *Ludwig Schläfli : 1814-1895, Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 2 vol., Birkhäuser, 1950-1953.

[10] L. Schläfli, *Quart. J. Math.*, **3** (1860), pp. 66-67.

QUADRATURE

Appel à auteurs

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

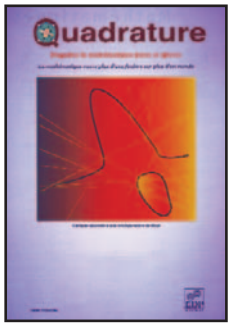
Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✔ articles de revue,
- ✔ brèves scientifiques,
- ✔ forum des lecteurs,
- ✔ manifestations,
- ✔ reportages,
- ✔ images mathématiques,
- ✔ analyses d'ouvrages et de logiciels,
- ✔ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✔ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N'hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



Quadrature
EDP Sciences
PA de Courtabœuf
17 avenue du Hoggar
BP 112
91944 Les Ulis Cedex A
Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17
E-mail : **quadrature@edpsciences.org**

Quadrature

Le magazine de mathématiques pures et épicées

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large "coin des problèmes" permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

BULLETIN D'ABONNEMENT
Quadrature

❒ Mme ❒ Mlle ❒ M.

Nom . . . . . .

Prénom . . . . . .

Profession . . . . . .

Institution . . . . . .

. . . . . .

Adresse . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Code Postal . . . . . .

Ville . . . . . .

Pays . . . . . .

e-mail . . . . . .

Veuillez enregistrer mon abonnement :

❒ Pour **1 an** (4 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) . . . . . .30 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) . . . . . .35 €

❒ Pour **2 ans** (8 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) . . . . . .55 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) . . . . . .65 €

Paiement :

❒ Envoyez-moi une facture proforma

❒ Chèque joint (à l'ordre d'EDP Sciences)

❒ Carte de Crédit :

❒ Visa ❒ Eurocard ❒ American Express

Carte No . . . . . .

Date de validité . . . . . .

date/signature

Veuillez retourner ce coupon à :

EDP Sciences - Service Abonnement
17, avenue du Hoggar • B.P. 112 • PA de Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A • France
Tél. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 - E-mail : subscribers@edpsciences.org

EDP SCIENCES